

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО**

Кафедра аэрогидромеханики

А.М. ЕЛИЗАРОВ

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ
ЖИДКОСТИ И ГАЗА**

Учебное пособие

Казань 2013

УДК 517.5+517.0
+532.5 ББК 22.19
Е 51

Рецензенты:

*доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры
аэрогидромеханики Д.В. Маклаков;
доктор физ.-мат. наук, профессор, директор НИЦ
«НИИММ им. Н.Г. Чеботарева» М.Г. Храмченков*

Елизаров А.М.

**Краевые задачи механики жидкости и газа: Учебное
пособие/ А.М. Елизаров. – Казань: Казанский федеральный
университет, 2013. – 225 с.**

В учебном пособии изложены основные результаты теории вариационных обратных краевых задач аэрогидродинамики для плоских течений.

Для аспирантов, магистрантов и студентов старших курсов, специализирующихся по механике жидкости и газа, прикладной математике и теории функций комплексного переменного.

*Принято на заседании Методической комиссии Инсти-
тута математики и механики им. Н.И. Лобачевского,
протокол заседания №3 от 18 декабря 2013 года*

© Казанский университет, 2013
© Елизаров А.М., 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Глава 1. Математические модели течений и краевые задачи.	10
1.1. Модель идеальной несжимаемой жидкости. Постановка краевых задач	10
1.2. Учет сжимаемости потока при дозвуковом течении	15
1.3. Учет вязкости в приближении пограничного слоя	26
1.4. Обратные краевые задачи аэрогидродинамики	32
1.5. Диапазон углов атаки	43
1.6. Вариационные обратные краевые задачи	51
1.7. Исторические замечания и библиографические ссылки	52
Глава 2. Корректность задачи нахождения квазирешений	58
2.1. Существование и единственность квазирешений	58
2.2. Квазирешения с ограничением максимума скорости	64
2.3. Исторические замечания и библиографические ссылки	68
Глава 3. Вариационные методы в задаче о квазирешениях. При- меры квазирешений	70
3.1. Функции Лагранжа и двойственные задачи	70
3.2. Итерационные алгоритмы	74
3.3. Непустота множества допустимых функций	78
3.4. Примеры построения квазирешений	81
3.5. Исторические замечания и библиографические ссылки	93
Глава 4. Профили максимальной подъемной силы в потоке иде- альной несжимаемой жидкости.	94
4.1. Основная вариационная ОКЗА	94
4.2. Численная оптимизация	112
4.3. Точное решение задачи A'	120
4.4. Численная оптимизация формы крыла экраноплана	129
4.5. Исторические замечания и библиографические ссылки	135
Глава 5. Поток вязкой жидкости или газа с большими числами Рейнольдса	139
5.1. Постановка вариационных задач	139
5.2. Профили максимальной подъемной силы в газе Чаплыгина	164
5.3. Оптимизированные профили в вязком потоке	174
5.4. Максимизация критического числа Маха для несущих крыловых профилей	181
5.5. Исторические замечания и библиографические ссылки	191

Глава 6. Оптимальные гидродинамически целесообразные распределения скорости в ОКЗА	194
6.1. Задание безотрывных распределений скорости	194
6.2. Максимизация подъемной силы	198
6.3. Диапазон углов атаки	202
6.4. Исторические замечания и библиографические ссылки	207
Библиографический список	208
Аббревиатуры, основные обозначения	216
Список иллюстраций	220
Список таблиц	225

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, прямыми называют краевые задачи, в которых требуется найти функцию или систему функций, удовлетворяющих в фиксированной области некоторому дифференциальному уравнению в частных производных или системе таких уравнений, а на границе области — заданному краевому условию. Наряду с прямыми задачами успешно развиваются теория и приложения обратных краевых задач (ОКЗ), в которых вместе с решением дифференциального уравнения в частных производных вся граница области или отдельные ее участки находятся по дополнительному краевому условию на искомой границе. Эти задачи составляют часть обширного класса краевых задач с неизвестными границами. Исследования теоретического и прикладного характера по ОКЗ и история развития этой теории, охватывающая более 75 лет, отражены в ряде монографий и обзорных статей [5, 6, 12, 19, 34–36, 57, 69, 71, 74, 76, 81, 89, 108–110, 118, 120, 123, 126, 128, 129]. Характерным для ОКЗ является то, что на искомых участках границы заданы два краевых условия, а на известных (если таковые имеются) — одно.

В задачах математической физики часто требуется найти вид границ, образовавшихся в результате рассматриваемого физического явления (например, границу каверны в задачах струйного обтекания, депрессионные кривые в задачах безнапорной фильтрации, границу выемки в задачах взрыва на выброс и другие). Так как форма этих границ является результатом процесса, свойством самого изучаемого явления, условия на границах варьироваться по усмотрению исследователя не могут — эти условия определяются физическим содержанием, точнее, моделью явления. Такие задачи, будучи задачами прогноза, предсказания результатов явления, получили название краевых задач со свободными границами. В отличие от них в обратных краевых задачах требуется найти такую форму границ, при которой изучаемый процесс и область, в которой он протекает, обладали бы нужными свойствами и отвечали желаемым условиям. Поэтому здесь краевые условия определяются не только моделью изучаемого процесса, но и предписываемыми инженерными свойствами, и могут изменяться вместе с последними. При этом исследователь получает возможность, задав соответствующие условия, влиять на процесс в нужном направлении, управлять им. С этих позиций ОКЗ относятся к задачам конструктивного характера и управления.

Обратные краевые задачи аэрогидродинамики (ОКЗА), с одной стороны, послужили отправной точкой в создании общей теории об-

ратных краевых задач (раздел которой они и составляют), и, с другой стороны, изучались самостоятельно в силу их специфичности и широких практических приложений. В ОКЗА речь идет не об изучении свойств готового объекта, а о создании инженерных аэродинамических объектов с заранее заданными свойствами. ОКЗА образуют широкий класс задач, для решения которых необходимы специальные подходы и изучению которых посвящено много работ. Основополагающие результаты по ОКЗА получили Вейниг, Бетц, Манглер, Л. А. Симонов, Г. Г. Тумашев, Лайтхилл, В. М. Шурыгин, Вудс, Г. Ю. Степанов, М. Т. Нужин, Эпплер, Вортманн, Либек и многие другие ученые. Среди отечественных исследователей значительное количество работ выполнено учеными ЦАГИ им. Н. Е. Жуковского и Казанского университета. Анализ выполненных работ позволил выявить общие тенденции развития теории и приложений ОКЗА, подробно изложенные в [34–36, 109].

Указанные выше исследования по ОКЗА внесли существенный вклад в развитие теории плоско-параллельных течений жидкости (прежде всего, идеальной и несжимаемой) или газа (как правило, при дозвуковых скоростях).

Теория плоско-параллельных течений идеальной несжимаемой жидкости — наиболее развитый раздел современной гидромеханики. Объясняется это двумя обстоятельствами. Во-первых, данная теория имеет ряд важных практических приложений и дает вполне приемлемые результаты в тех областях исследования, где вязкостью жидкости можно пренебречь. К ним относятся струйные и кавитационные течения, поверхностные волны на воде, течения около крыловых профилей. Во-вторых, при исследовании плоских задач можно с успехом использовать развитый аппарат теории функций комплексного переменного, что позволяет во многих случаях получить точное аналитическое решение задачи, а затем всесторонне проанализировать его. Такой анализ подразумевает установление областей изменения исходных определяющих параметров задачи и исследование в этих областях поведения основных гидродинамических характеристик (параметрический анализ); нахождение предельных режимов обтекания, т. е. таких режимов, для которых значения определяющих параметров приближаются к границе области своего определения; оптимизацию изучаемых гидродинамических форм на основе имеющихся аналитических представлений. Следует отметить, что большинство задач гидродинамики существенно нелинейно и точное аналитическое решение является скорее исключением, чем правилом. Поэтому важное значение имеют вопросы существования и единственности решения соответствующих краевых задач. При исследовании плоско-параллельных течений здесь достигнуты впечатляющие успехи благодаря применению методов теории функций и функционального анализа. Современное состояние теории плоских задач гидромеханики идеальной жидкости изложено во многих учебниках и монографиях (см., например, [70, 73, 77, 79, 113]).

Основным объектом исследований в настоящей книге служат вариационные ОКЗ. Мы используем термин «вариационные обратные краевые задачи» для обозначения такого класса двумерных (плоских) краевых задач с неизвестными границами, в которых искомыми являются как решение дифференциального уравнения в частных производных, так и сама область D его определения, причем последняя обладает некоторым экстремальным свойством, а на границе ∂D задается одно краевое условие (как в прямых задачах). Экстремальное свойство области D выражается в виде требования максимизации (минимизации) заданного функционала J (обычно при дополнительных ограничениях). Вместе с тем, сама граница является искомым элементом решения, и, следовательно, эти задачи примыкают к краевым задачам с неизвестными границами.

По своей постановке названные задачи относятся, с одной стороны, к задачам оптимального проектирования (например, [115, 124]), с другой стороны, к задачам оптимизации систем с распределенными параметрами (см. [80]), а применение методов комплексного анализа позволяет свести их к задачам классического вариационного исчисления. При этом наличие или отсутствие дополнительных ограничений может существенно изменять картину разрешимости задач. Поэтому нужно определить, какие функционалы целесообразно рассматривать и какие дополнительные ограничения нужно привлекать. Из общих соображений ответы на эти вопросы найти затруднительно. Вместе с тем, естественным источником вариационных ОКЗ являются теории, связанные с моделированием природных явлений (например, течений жидкости или газа в классической аэрогидродинамике).

Вариационные ОКЗА реализуют один из подходов к оптимизации аэродинамических форм и в двумерном случае заключаются в построении профилей, обладающих оптимизированными характеристиками (максимальным коэффициентом подъемной силы или аэродинамическим качеством, минимальным коэффициентом сопротивления и др.). В случае течения идеальной несжимаемой жидкости (ИНЖ) или дозвукового течения газа они сводятся к вариационным ОКЗ для аналитических функций.

В учебном пособии изложены основные результаты теории вариационных ОКЗ для плоских течений. В основу положены результаты, изложенные в соответствующих разделах монографии [42].

В каждой главе учебного пособия кратко описаны история развития и наиболее важные аспекты соответствующего раздела теории. Эта информация, а также библиографические ссылки содержатся в конце каждой из глав. Нумерация определений, теорем, лемм, замечаний, рисунков и таблиц ведется в двузначном виде: первая цифра — номер главы, вторая — номер по порядку. Формулы пронумерованы в порядке появления в каждом из разделов глав тремя цифрами, первая из которых — номер главы, вторая — номер раздела главы, а третья — порядковый номер формулы.

Гл. 1 содержит описание математических моделей течений вокруг изолированного крылового профиля, базирующихся на классических гидродинамических моделях: идеальной несжимаемой жидкости, идеального газа и вязкой несжимаемой жидкости с большими числами Рейнольдса. Здесь же приведены постановка и методы решения основной ОКЗА для изолированного крылового профиля в потоке ИНЖ или газа Чаплыгина при дозвуковых скоростях, указаны условия разрешимости и однолиственности решения ОКЗА. Поставлена и исследована основная ОКЗА для диапазона углов атаки; описана схема постановки вариационных ОКЗ.

В гл. 2 и гл. 3 изложена теория квазирешений ОКЗА: введено понятие квазирешения и описаны способы его построения; исследованы вопросы существования и единственности; изложена теория квазирешений, учитывающих ограничения на максимум скорости, описаны вариационные методы для задачи о квазирешениях; приведены примеры квазирешений.

В гл. 4 и гл. 5 на базе интегрального представления решения основной ОКЗА исследованы задачи аэродинамической оптимизации формы крыловых профилей с заданным периметром контура в потоках идеальной несжимаемой жидкости и вязкой жидкости с большими числами Рейнольдса. Записан оператор, характеризующий профили с кусочно-гладкими границами, и построены функционалы, минимизация которых эквивалентна максимизации подъемной силы или аэродинамического качества, минимизации профильного сопротивления. Исследованы существование и единственность экстремальных решений. Проанализированы результаты вычислительных экспериментов по построению оптимизированных решений для различных условий безотрывного обтекания, приведены примеры численной оптимизации. Рассмотрены также оптимизационные задачи с дополнительными ограничениями на аэродинамические параметры и задачи оптимизации для диапазона углов атаки.

В гл. 5 исследованы вариационные ОКЗА для дозвукового течения газа, в частности, поставлены и решены задачи максимизации подъемной силы или аэродинамического качества, минимизации профильного сопротивления изолированного профиля с использованием моделей газа Чаплыгина и пограничного слоя. Здесь же исследована задача максимизации критического числа Маха для несущих крыловых профилей: получена точная верхняя оценка этого числа для расширенного класса течений, включающего неоднородные, указан способ построение физически реальных оптимизированных профилей, даны некоторые обобщения.

В гл. 6 вынесены вопросы о способах задания гидродинамически целесообразных исходных данных вариационных ОКЗА: распределений скорости и условий, гарантирующих в рамках принятых моделей отсутствие отрыва пограничного слоя при обтекании профилей. Здесь же решены задачи оптимизации: для гидродинамически целесообразных

распределений скорости в ОКЗА с использованием условий безотрывного обтекания с пограничным слоем найдены распределения скорости, обеспечивающие максимум подъемной силы при обтекании профиля при расчетном угле атаки или же с учетом диапазона изменения этого угла.

Автор надеется, что книга будет полезна не только аэрогидродинамикам, но и математикам, интересующимся приложениями теории аналитических функций, а также инженерам, работающим в области оптимального проектирования. В связи с этим у читателя предполагается наличие знаний по механике жидкости и газа, по теории функций и функциональному анализу.

Замечания и пожелания по уточнению и дополнению текста учебного пособия автор примет с признательностью.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЙ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

1.1. Модель идеальной несжимаемой жидкости. Постановка краевых задач

1.1.1. Модель идеальной несжимаемой жидкости. В физической плоскости $z = x + iy$ (рис. 1.1, а) непроницаемый крыловой профиль плавно (безотрывно) обтекается установившимся безвихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости (ИНЖ). Поток на бесконечности считаем однородным, направленным горизонтально. Величина скорости на бесконечности $v_\infty = 1$, а плотность жидкости $\rho = \rho_\infty = 1$.

Обозначим через G_z область течения, содержащую бесконечно удаленную точку. Контур L_z профиля является спрямляемым (с периметром $L = 2$), замкнутым и гладким за исключением, быть может, задней кромки B ($z = 0$), где задан внутренний к области течения угол, равный $\varepsilon\pi$, $\varepsilon \in [1, 2]$ (при $\varepsilon = 1$ получим всюду гладкий контур). Начало выбранной декартовой системы координат совпадает с точкой B , а ось абсцисс параллельна вектору скорости набегающего потока.

Как известно, хордой профиля называется отрезок, соединяющий заднюю кромку B с наиболее удаленной от нее точкой C с координатами (x_0, y_0) (для физически реальных профилей хорда определяется однозначно). Обозначим через b длину хорды, а через α — угол атаки (по определению это угол между хордой профиля и направлением скорости набегающего потока, см. рис. 1.1, а). В силу введенных определений имеем

$$b = (x_0^2 + y_0^2)^{1/2}, \quad \alpha = -\arctg \frac{y_0}{x_0}. \quad (1.1.1)$$

Часто крыловые профили располагают так, что ось абсцисс направлена вдоль их хорды. Обозначим через (x', y') координаты в этой системе координат. С учетом (1.1.1) переход к ней осуществляется по формуле

$$z' = x' + iy' = e^{i\alpha} \frac{z}{b} + 1. \quad (1.1.2)$$

Максимальная толщина профиля определяется как длина наибольшего отрезка, соединяющего две точки контура профиля и перпендикулярного хорде. Относительная максимальная толщина t_{\max} — отношение максимальной толщины профиля к его хорде (часто выражается в процентах).

Дуговая координата s контура профиля отсчитывается от $s = 0$ в точке B до $s = L$ в ней же так, что при возрастании s вдоль L_z область

течения остается слева. В качестве масштаба длин выберем полупериметр контура $L/2 = 1$ (для реальных профилей он мало отличается от длины b их хорды).

В соответствии с гипотезой Жуковского–Чаплыгина–Кутта считаем, что B является точкой схода потока и скорость v_* в ней конечна: равна нулю при $\varepsilon \in [1, 2)$, отлична от нуля при $\varepsilon = 2$ (типичный вид распределения скорости представлен на рис. 1.1, б; штриховые линии соответствуют случаю $\varepsilon \in [1, 2)$, сплошные — случаю $\varepsilon = 2$).

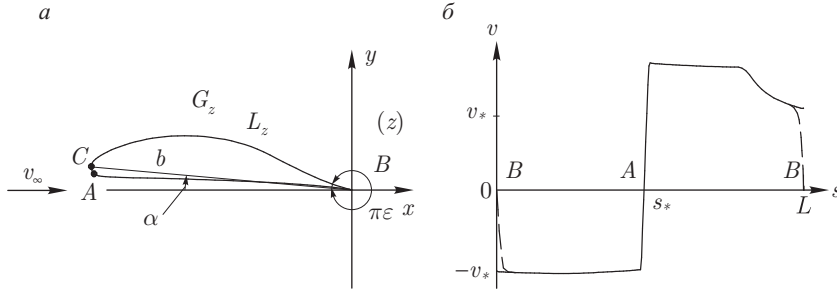


Рис. 1.1. К постановке краевых задач: а — крыловой профиль в физической плоскости; б — типичный вид распределения скорости $v(s)$

Введем комплексные производные

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

где $\bar{z} = x - i y$ (здесь и далее черта означает комплексное сопряжение).

В силу предположения о безвихревом характере обтекания потенциал скорости φ ($\mathbf{v} = \nabla \varphi$) удовлетворяет уравнению неразрывности (уравнению Лапласа)

$$\Delta \varphi = 4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}} = 0, \quad z \in G_z,$$

и, следовательно, является гармонической функцией. Введем комплексный потенциал течения

$$w(z) = \varphi(x, y) + i \psi(x, y), \quad (1.1.3)$$

где $\psi(x, y)$ — гармоническая функция (функция тока), сопряженная к $\varphi(x, y)$. В силу сделанных предположений функция $w(z)$ — аналитическая в области течения G_z (во внешности профиля) и удовлетворяет известным дифференциальным соотношениям (условиям Коши–Римана)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

т. е. $\partial w / \partial \bar{z} = 0$.

В общем случае комплексный потенциал $w(z)$ будет многозначной функцией из-за многозначности функции потенциала $\varphi(x, y)$. Избе-

жать этой трудности можно, используя производную комплексного потенциала, которая всегда является однозначной. Поэтому введем комплексно сопряженную скорость

$$\bar{v} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

являющуюся однозначной и аналитической функцией в области G_z .

Отметим важное свойство, определяемое моделью ИНЖ: потенциал скорости потока в исходной физической области течения после конформного преобразования перейдет в потенциал скорости потока в преобразованной области. При этом будут равны значения потенциала скорости в первоначальном и преобразованном потоках в точках, соответствующих друг другу при конформном преобразовании.

Описанное свойство позволяет применить для решения многих краевых задач с неизвестными границами так называемый **способ сопоставления плоскостей**. Взяв течение идеальной несжимаемой жидкости в канонической области (например, обтекание единичного круга) и сопоставив ему течение в рассматриваемой физической области, можно установить зависимость между дуговыми абсциссами искомого контура и границы канонической области (в частности, единичной окружности) и свести задачу с неизвестной границей к решению прямой задачи (в частности, задачи Шварца) в канонической области.

Каждый профиль, обтекаемый потоком жидкости или газа, имеет определенные значения аэродинамических характеристик: распределения скорости v и давления p по контуру профиля (или, что используется чаще, распределение коэффициента давления

$$C_p = \frac{2(p - p_\infty)}{\rho_\infty v_\infty^2},$$

где p_∞ — давление на бесконечности), а также результирующих сил и моментов, действующих на профиль. Из принятой модели ИНЖ следуют простые формулы расчета этих характеристик.

Как известно (см., например, [68]), связь скорости и давления задает уравнение Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = 0, \quad (1.1.4)$$

где p_0 — величина давления в точке торможения потока. В рамках модели ИНЖ $\rho = \rho_\infty \equiv \text{const}$, поэтому из (1.1.4) получим

$$p = p_0 - \frac{\rho_\infty v^2}{2}. \quad (1.1.5)$$

Непосредственный способ вычисления сил и моментов состоит в интегрировании давления p по контуру профиля:

$$\begin{aligned} X &= \oint_{L_z} p \, dy, & Y &= - \oint_{L_z} p \, dx, \\ M_z &= - \oint_{L_z} p[(x - x_0) \, dx + (y - y_0) \, dy]. \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Здесь X , Y — проекции результирующей силы $R = X + iY$ на оси координат, M_z — момент сил относительно передней кромки, а интегрирование проведено вдоль контура L_z в направлении роста s . Если от сил и моментов перейти к соответствующим безразмерным коэффициентам

$$\tilde{C}_x = \frac{2X}{\rho_\infty v_\infty^2 b}, \quad \tilde{C}_y = \frac{2Y}{\rho_\infty v_\infty^2 b}, \quad m_z = \frac{2M_z}{\rho_\infty v_\infty^2 b^2}, \quad (1.1.7)$$

то придем к выражениям

$$\begin{aligned} \tilde{C}_x &= b^{-1} \oint_{L_z} c_p \, dy, & \tilde{C}_y &= -b^{-1} \oint_{L_z} c_p \, dx, \\ m_z &= -b^{-2} \oint_{L_z} c_p[(x - x_0) \, dx + (y - y_0) \, dy]. \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Обозначим через $v(s)$ распределение скорости потока на контуре L_z как функцию дуговой абсциссы (рис. 1.1, б). В соответствии с моделью течения кусочно-гладкая функция $v(s)$ обращается в нуль в точке A разветвления потока ($s = s_*$) и непрерывно дифференцируема в этой точке (последнее условие обеспечивается гладкостью L_z в точке A). Знак $v(s)$ свяжем с направлением обхода и будем считать, что $v(s) < 0$ при $s \in (0, s_*)$, где вектор скорости направлен против направления обхода, и $v(s) > 0$ при $s \in (s_*, L)$. Кроме того, $v(L) = -v(0) = v_* \neq 0$ при $\varepsilon = 2$ (бесконечно тонкая кромка), $v(0) = v(L) = 0$ при $\varepsilon \in [1, 2)$ (штриховые линии в окрестностях точек $s = 0$ и $s = L$ на рис. 1.1, б). Величина ε связана с распределением скорости: $v(s) \sim -Cs^{2/\varepsilon-1}$ в окрестности точки $s = 0$, $v(s) \sim C(L - s)^{2/\varepsilon-1}$ в окрестности точки $s = L$, $C = \text{const} > 0$.

Обозначим Γ циркуляцию скорости:

$$\Gamma = \int_0^L v(s) \, ds.$$

Формулы (1.1.6), (1.1.8) требуют для нахождения аэродинамических характеристик провести интегрирование вдоль контура профиля. Однако модель ИНЖ позволяет существенно упростить этот расчет. В итоге имеем (см. [35, 109]) $X - iY = -i\rho_\infty v_\infty \Gamma$. Значит, сила сопро-

тивления X равна нулю (известный парадокс Даламбера), а подъемная сила может быть найдена по формуле

$$Y = \rho_{\infty} v_{\infty} \Gamma \quad (1.1.9)$$

(теорема Жуковского о подъемной силе). Отсюда и из (1.1.7) непосредственно следует, что

$$\tilde{C}_y = \frac{2\Gamma}{b}. \quad (1.1.10)$$

Таким образом, для нахождения коэффициента \tilde{C}_y нужно знать величины Γ и b циркуляции скорости и длины хорды.

Укажем другой способ задания коэффициента подъемной силы. Отнесем Y к величине скоростного напора на бесконечности и длине полупериметра контура:

$$C_y = \frac{\rho_{\infty} v_{\infty} \Gamma}{0,5 \rho_{\infty} v_{\infty}^2 L/2} = \frac{2\Gamma}{v_{\infty} L/2} = 2\Gamma. \quad (1.1.11)$$

Здесь учтено, что по постановке задачи $v_{\infty} = 1$, $L = 2$. Использование формулы (1.1.11) не требует знания величины b , что существенно, когда форма профиля заранее не известна (как в обратных задачах, см. разд. 1.4). Кроме того, если учесть, что $b \approx L/2$, особенно для достаточно тонких слабо изогнутых профилей, то получим, что в этой ситуации коэффициенты (1.1.10) и (1.1.11) практически совпадают. Точно так же определим коэффициент C_x профильного сопротивления:

$$C_x = \frac{X}{0,5 \rho_{\infty} v_{\infty}^2 L/2} = \frac{4X}{\rho_{\infty} L v_{\infty}^2}, \quad (1.1.12)$$

который будем использовать при учете вязкости потока в приближении пограничного слоя (ПС).

Еще одна характерная особенность модели ИНЖ состоит в том, что известные аэродинамические характеристики профиля для некоторого режима обтекания (α, v_{∞}) нетрудно пересчитать на другие значения угла атаки α_1 и скорости на бесконечности $v_{\infty 1}$. Описание этого свойства приведено ниже в п. 1.4.3.

1.1.2. Постановка краевых задач. В силу принятых допущений комплексный потенциал $w(z)$ в окрестности бесконечности имеет вид

$$w(z) = v_{\infty} z - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}. \quad (1.1.13)$$

Так как контур L_z предполагается непроницаемым, на нем производная потенциала скорости по внешней нормали $\partial\varphi/\partial n = 0$. В силу условий Коши–Римана $\partial\varphi/\partial n = \partial\psi/\partial s$, т. е. $\psi = \text{const}$ на L_z . Примем на контуре $\psi = 0$. Положив $\varphi(s_*) = 0$, на L_z будем иметь

$$\varphi(s) = \int_{s_*}^s v(s) ds, \quad s \in [0, L]. \quad (1.1.14)$$

Обозначим $\varphi_1 = \varphi(L)$, $\varphi_0 = \varphi(0)$, тогда $\Gamma = \varphi_1 - \varphi_0$. Таким образом, для функции $w(z)$, аналитической в области G_z и непрерывной в замкнутой области \overline{G}_z , на границе L_z имеем

$$\operatorname{Re} w(z)|_{L_z} = \varphi(s), \quad \operatorname{Im} w(z)|_{L_z} = 0, \quad s \in [0, L], \quad (1.1.15)$$

где Re и Im обозначают соответственно действительную и мнимую части комплекснозначной функции.

Если контур L_z задан, имеем **прямую краевую задачу** — задачу об определении аналитической функции $w(z)$ по второму краевому условию в (1.1.15). Первое условие служит для нахождения распределения скорости $v(s) = \varphi'(s)$.

Если же L_z — искомый контур фиксированного периметра L и на нем задана функция

$$v = v(s), \quad s \in [0, L], \quad (1.1.16)$$

удовлетворяющая перечисленным выше условиям, а также условиям гидродинамической целесообразности, речь о которых пойдет ниже, имеем **краевую задачу с неизвестной границей**. В силу (1.1.15) она эквивалентна внешней обратной краевой задаче (см. [12]) для функции $w(z)$, аналитической в области G_z , непрерывной в замкнутой области \overline{G}_z и имеющей в бесконечно удаленной точке простой полюс и логарифмическую особенность, а на искомой границе L_z — известное значение. Поэтому будем называть ее **обратной краевой задачей аэрогидродинамики (ОКЗА)**.

Как известно [35],[36],[109], при постановке ОКЗА возможны различные способы параметризации исходного распределения скорости. Обратную задачу с параметризацией (1.1.16) (по дуговой абсциссе s) называют основной, так как она оказала значительное влияние на развитие общей математической теории обратных краевых задач. Кроме того, как будет показано ниже, интегральное представление решения основной ОКЗА служит базой для постановки вариационных аэродинамических задач.

1.2. Учет сжимаемости потока при дозвуковом течении

1.2.1. Уравнения движения в области годографа скорости.

Рассмотрим установившееся движение совершенного газа в какой-либо области. Предположим, что в некоторой характерной точке, например, на бесконечности *) известны скорость v_∞ , давление p_∞ и плот-

*) Выбор бесконечно удаленной точки в качестве характерной вовсе не обязателен: таковой может быть любая точка, где заранее известны скорость, давление и плотность.

ность ρ_∞ . Движение газа считаем адиабатическим, тогда давление p и плотность ρ связаны соотношением

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{const}, \quad (1.2.1)$$

где κ — показатель адиабаты (для воздуха, как известно, $\kappa = 7/5$).

Определим число Маха M_∞ на бесконечности. Для адиабатического течения квадрат скорости звука $a_\infty^2 = \kappa p_\infty / \rho_\infty$. Отсюда найдем

$$M_\infty^2 = \frac{v_\infty^2}{a_\infty^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\rho_\infty v_\infty^2}{p_\infty}. \quad (1.2.2)$$

Пусть p_0 и ρ_0 — давление и плотность газа в точке торможения, v — скорость потока, a_* — критическая скорость звука, $\lambda = v/a_*$ — приведенная скорость; $\bar{p} = p/p_0$ и $\bar{\rho} = \rho/\rho_0$ — безразмерные давление и плотность. При заданных v_∞ , p_∞ и ρ_∞ параметры a_* , p_0 и ρ_0 являются физическими константами, которые легко найти по известному числу M_∞ . Запишем адиабатические соотношения, которые являются следствием уравнений Бернулли (1.1.4) и адиабатической зависимости (1.2.1) (M — число Маха):

$$\lambda = M \sqrt{\frac{\kappa + 1}{2 + (\kappa - 1) M^2}}, \quad (1.2.3)$$

$$\bar{p} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{-\kappa/(\kappa - 1)}, \quad (1.2.4)$$

$$\bar{\rho} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{-1/(\kappa - 1)}, \quad (1.2.5)$$

$$\bar{p} = \left[1 - \frac{\lambda^2(\kappa - 1)}{\kappa + 1}\right]^{1/(\kappa - 1)}. \quad (1.2.6)$$

Подставив в правые части равенства (1.2.3) величину M_∞ , найдем

$$\lambda_\infty = \frac{v_\infty}{a_*} = \frac{h M_\infty}{(h^2 - 1 + M_\infty^2)^{1/2}}, \quad (1.2.7)$$

где $h^2 = (\kappa + 1)/(\kappa - 1)$. Аналогично, подставив в правые части равенств (1.2.4) и (1.2.5) величину M_∞ , найдем $\bar{p}_\infty = p_\infty/p_0$ и $\bar{\rho}_\infty = \rho_\infty/\rho_0$, а затем определим постоянные a_* , p_0 и ρ_0 .

Вместо вектора скорости \mathbf{v} будем искать вектор приведенной скорости $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{v}/a_*$ с компонентами λ_x и λ_y . Для приведенной скорости введем потенциал φ и функцию тока ψ :

$$\lambda_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \lambda_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \lambda_x = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \lambda_y = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.2.8)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.2.9)$$

Учтя, что

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}, \quad (1.2.10)$$

получим в области течения замкнутую систему уравнений (1.2.9), (1.2.10) для отыскания неизвестных функций φ , ψ , \bar{p} и λ , где связь между \bar{p} и λ задается уравнением (1.2.6). Безразмерное давление \bar{p} определяется из уравнения адиабаты (1.2.1), которое для величин \bar{p} , $\bar{\rho}$ приобретает вид

$$\bar{p} = \bar{\rho}^\varkappa. \quad (1.2.11)$$

Названная система уравнений является нелинейной, и ее решение значительно упростится, если согласно С. А. Чаплыгину (см. [26, 91]) перейти от независимых переменных x и y в области течения к новым независимым переменным λ и ϑ в области годографа скорости, где ϑ — угол наклона вектора $\mathbf{\lambda}$ к оси x . Переход к новым переменным можно осуществить с помощью соотношения

$$dz = \left(\frac{d\varphi}{\lambda} + i \frac{d\psi}{\bar{\rho}\lambda}\right) e^{i\vartheta}, \quad (1.2.12)$$

которое вытекает из (1.2.9). Здесь $z = x + iy$ — комплексная переменная в физической плоскости. Так как правая часть выражения (1.2.12) является полным дифференциалом,

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \quad \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\bar{\rho}\lambda}\right) \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}. \quad (1.2.13)$$

Теперь определяющие уравнения представляют собой систему двух линейных уравнений (1.2.13) относительно неизвестных $\varphi(\lambda, \vartheta)$, $\psi(\lambda, \vartheta)$, где $\bar{\rho}$ находится из (1.2.6).

Для расчета аэродинамических характеристик необходим коэффициент давления C_p . Из уравнений Бернулли (1.1.4) и адиабаты (1.2.1) следует, что

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\rho_\infty v_\infty^2 / 2} = \frac{2}{\varkappa M_\infty^2} \left\{ \left[\frac{1 - \lambda^2(\varkappa - 1)/(\varkappa + 1)}{1 - \lambda_\infty^2(\varkappa - 1)/(\varkappa + 1)} \right]^{\varkappa/(\varkappa - 1)} - 1 \right\}. \quad (1.2.14)$$

С. А. Чаплыгин [84] предложил два метода решения системы (1.2.13): точный и приближенный. Точный метод может быть применен к достаточно широкому классу задач о течениях сжимаемой жидкости, ограниченных свободными поверхностями и полигональными твердыми стенками. Обзор работ, выполненных в этом направлении, можно найти в монографиях [26, 83].

Ниже в основном исследуются течения с криволинейными твердыми границами. Более того, форма этих границ не известна заранее и должна определиться в ходе решения задач оптимизации. Поэтому

перспектива построения аналитических решений базируется на применении приближенного метода решения системы (1.2.13).

1.2.2. Модель газа Чаплыгина. Приближенный метод С. А. Чаплыгина состоит в аппроксимации адиабатической зависимости (1.2.11) в плоскости $(1/\bar{\rho}, \bar{p})$ прямой линией: вместо (1.2.11) используется уравнение

$$\bar{p} = -\frac{A}{\bar{\rho}} + B, \quad (1.2.15)$$

где $A > 0$ и B — постоянные. Газ, в котором связь между давлением и плотностью задается уравнением (1.2.15), называют газом Чаплыгина.

Уравнение Бернулли (1.1.4) с учетом равенств

$$a_0^2 = \frac{\kappa p_0}{\rho_0}, \quad \frac{a_0^2}{a_*^2} = \frac{\kappa + 1}{2} \quad (1.2.16)$$

(a_0 — скорость звука в точке торможения) приводится к виду

$$\lambda^2 + \frac{\kappa + 1}{\kappa} \int_1^{\bar{p}} \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{p}}{d\bar{\rho}} d\bar{\rho} = 0. \quad (1.2.17)$$

Подставив (1.2.15) в (1.2.17), после интегрирования получим

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4c^2\lambda^2}}, \quad \text{где } c^2 = \frac{\kappa}{2A(\kappa + 1)} > 0, \quad (1.2.18)$$

причем результат интегрирования не зависит от величины параметра B . Если теперь подставить (1.2.18) в систему (1.2.13) и сделать замену

$$\lambda(S) = \frac{\exp(S)}{1 - c^2 \exp(2S)}, \quad (1.2.19)$$

то вместо (1.2.13) получим условия Коши–Римана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \psi}{\partial S}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial S} = -\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}. \quad (1.2.20)$$

При этом комплексный потенциал $w = \varphi + i\psi$ будет аналитической функцией переменной $\chi = S - i\vartheta$. Переход в физическую плоскость осуществляется по формуле

$$dz = \exp(-\chi) dw - c^2 \overline{\exp(\chi)} dw \quad (1.2.21)$$

(напомним, что черта означает комплексное сопряжение), которая следует из (1.2.12).

Введем новую комплексную переменную $z_1 = x_1 + iy_1$, связанную с w и χ соотношением $dz_1 = \exp(-\chi) dw$. Область изменения этой переменной называют областью фиктивного течения несжимаемой жидкости. Тогда $dw/dz_1 = \exp \chi$ — комплексно-сопряженная скорость

фиктивного течения, $\Lambda = \exp S$ — модуль этой скорости. Из формул (1.2.18) и (1.2.19) найдем

$$\lambda = \frac{\Lambda}{1 - c^2 \Lambda^2}, \quad \Lambda = \frac{2\lambda}{1 + \sqrt{1 + 4c^2 \lambda^2}}, \quad \bar{\rho} = \frac{1 - c^2 \Lambda^2}{1 + c^2 \Lambda^2}. \quad (1.2.22)$$

Предположим теперь, что каким-то способом построена область течения несжимаемой жидкости со скоростью на бесконечности

$$\Lambda_\infty = \frac{2\lambda_\infty}{1 + \sqrt{1 + 4c^2 \lambda_\infty^2}} \quad (1.2.23)$$

и найден комплексный потенциал w течения в этой области. Тогда с помощью формулы (1.2.21) можем найти соответствующую область течения газа Чаплыгина и по первой и третьей из формул (1.2.22) построить поля скоростей и плотностей для этого газа. Наклон вектора скорости к вещественной оси, задаваемый углом ϑ , в обоих потоках одинаков.

Выбор угла наклона прямой (1.2.15) или, что равнозначно, параметра c^2 можно осуществлять различными способами (см., например, [35, с. 61]). С. А. Чаплыгин заменял адиабатическую зависимость $\bar{p} = \bar{p}(1/\bar{\rho})$ касательной прямой, проведенной в точке $\bar{\rho} = 1$, $\bar{p} = 1$ торможения потока. В этом случае $A = \varkappa$ и $c^2 = 1/[2(\varkappa + 1)]$. Параметр c^2 можно выбирать из условия наилучшей аппроксимации адиабатической зависимости (1.2.6) между приведенной скоростью λ и безразмерной плотностью \bar{p} приближенной зависимостью (1.2.18). При таком выборе существенен диапазон изменения скоростей λ . В частности, Г. Ю. Степанов (см. [81, п. 24]) предложил универсальное значение $c^2 = 0,296$. Наши расчеты показали, что при этом относительная погрешность формулы (1.2.18) по отношению к (1.2.6) в диапазоне $0 < \lambda < 0,89$ составляет всего 2,3 %.

Отметим, что при аппроксимации (1.2.15) и сохранении значений скорости λ в характерных точках потока давление и плотность в этих точках, вообще говоря, изменяются. В самом деле, согласно (1.2.18) в точке торможения плотность $\rho = \rho_0$, однако, чтобы $p = p_0$, необходимо задать $B = 1 + A$. Пусть $B = 1 + A$, но тогда вовсе не обязательно, что давление и плотность сохранят свои значения в бесконечно удаленной точке. Будем отмечать эти новые значения давления и плотности в характерных точках потока звездочкой. Согласно (1.2.15), (1.2.18) новые безразмерные плотность и давление

$$\begin{aligned} \bar{p}_0^* &= \frac{\varkappa}{2(\varkappa + 1)c^2} + B, & \bar{\rho}_\infty^* &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4c^2 \lambda_\infty^2}}, \\ \bar{p}_\infty^* &= \frac{\varkappa \sqrt{1 + 4c^2 \lambda_\infty^2}}{2(\varkappa + 1)c^2} + B, \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

а размерные — $p_0^* = \bar{p}_0^* p_0$, $p_\infty = \bar{p}_\infty^* p_0$, $\rho_\infty = \bar{\rho}_\infty^* \rho_0$.

Приведем еще один вариант выбора постоянной c^2 , который в сочетании с изложенной ниже модификацией модели газа Чаплыгина оказался эффективным при решении оптимизационной струйной задачи о форме оптимального непроницаемого парашюта в дозвуковом потоке газа. Будем выбирать c^2 так, чтобы $\rho_\infty = \rho_\infty^*$. Тогда из (1.2.18) вытекает, что

$$c^2 = \frac{1 - \bar{\rho}_\infty^2}{4\lambda_\infty^2 \bar{\rho}_\infty}. \quad (1.2.25)$$

На рис. 1.2 наклонной штриховой линией показан результат замены адиабатической зависимости $\bar{p} = \bar{p}(1/\bar{\rho})$ прямой (1.2.15), когда c^2 выбирается по способу (1.2.25), $B = A + 1$ и $M_\infty = 0.8$. Из уравнения Бернулли (1.2.17) следует, что для истинного адиабатического процесса квадрат приведенной скорости λ пропорционален площади криволинейной трапеции, затемненной на рис. 1.2, с коэффициентом

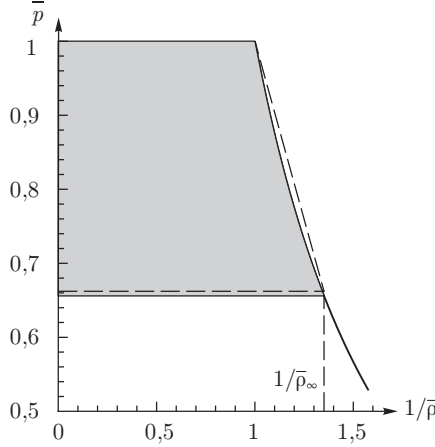


Рис. 1.2. Аппроксимация адиабаты для $M_\infty = 0.8$, $\kappa = 7/5$

пропорциональности $\kappa/(\kappa + 1)$. При аппроксимации правая стенка криволинейной трапеции заменяется прямой, и скорость λ_∞ теперь пропорциональна площади новой трапеции, границы которой показаны штриховой линией. Чтобы в точке $\bar{\rho} = \bar{\rho}_\infty$ скорость при аппроксимации получилась равной истинному значению λ_∞ , необходимо равенство площадей новой и старой трапеций. Это приводит к увеличению значения \bar{p}_∞ . Например, при $M_\infty = 0.8$ истинные значения безразмерных плотности и давления будут соответственно $\bar{\rho}_\infty = 0.7400$ и $\bar{p}_\infty = 0.6560$. При аппроксимации же получим $\bar{p}_\infty^* = 0.6622$, что примерно на 1 % больше истинного значения \bar{p}_∞ .

Коэффициент давления, вычисленный через значения плотности и давления на бесконечности в газе Чаплыгина, обозначим C_p^* . Тогда

$$C_p^* = \frac{p - p_\infty^*}{\rho_\infty^* v_\infty^2 / 2}.$$

Из (1.2.15) получим

$$\begin{aligned} p - p_\infty^* &= -Ap_0 \left(\sqrt{1 + 4c^2\lambda^2} - \sqrt{1 + 4c^2\lambda_\infty^2} \right) = \\ &= \frac{4Ac^2\lambda_\infty^2 p_0}{\sqrt{1 + 4c^2\lambda^2}} \frac{(1 - \lambda^2/\lambda_\infty^2)}{1 + [(1 + 4c^2\lambda^2)/(1 + 4c^2\lambda_\infty^2)]^{1/2}}. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом равенств (1.2.16), (1.2.18), (1.2.24) выведем

$$C_p^* = \frac{2(1 - \lambda^2/\lambda_\infty^2)}{1 + [(1 + 4c^2\lambda^2)/(1 + 4c^2\lambda_\infty^2)]^{1/2}}, \quad (1.2.26)$$

причем результат не зависит от способа выбора параметра аппроксимации B .

Как показано Л. И. Седовым [78], для крылового профиля, обтекаемого непрерывно потоком газа при условии баротропии (газ Чаплыгина удовлетворяет этому условию), справедливы парадокс Даламбера и формула Жуковского о подъемной силе: $Y = \rho_\infty v_\infty \Gamma$, где Γ — циркуляция скорости вокруг профиля. Это обстоятельство существенно используется в дальнейшем при оптимизации формы крыловых профилей, обтекаемых газовым потоком.

В формуле (1.2.26) коэффициент давления выражен через приведенную скорость λ . Однако при вычислении аэродинамических характеристик полезно определить C_p^* через скорость Λ фиктивного потока. Это можно сделать с помощью первой формулы (1.2.22), подставив в (1.2.26) выражение λ через Λ . Однако можно поступить проще. Для газа Чаплыгина прямая, аппроксимирующая адиабату, проходит в плоскости $(1/\bar{p}, \bar{p})$ через точки $(1, \bar{p}_0^*)$ и $(1/\bar{p}_\infty^*, \bar{p}_\infty^*)$. Уравнение этой прямой

$$\frac{\bar{p} - \bar{p}_\infty^*}{\bar{p}_0^* - \bar{p}_\infty^*} = \frac{1/\bar{p} - 1/\bar{p}_\infty^*}{1 - 1/\bar{p}_\infty^*}. \quad (1.2.27)$$

С помощью третьей из формул в (1.2.22) можем выразить правую часть соотношения (1.2.27) через скорость Λ фиктивного течения несжимаемой жидкости. Подставив (1.2.22) в (1.2.27), получим

$$\frac{\bar{p} - \bar{p}_\infty^*}{\bar{p}_0^* - \bar{p}_\infty^*} = \left[\frac{1 + c^2\Lambda^2}{1 - c^2\Lambda^2} - \frac{1 + c^2\Lambda_\infty^2}{1 - c^2\Lambda_\infty^2} \right] \left[1 - \frac{1 + c^2\Lambda_\infty^2}{1 - c^2\Lambda_\infty^2} \right]^{-1},$$

где Λ_∞ находится из (1.2.23). Отсюда после упрощений выведем

$$\frac{\bar{p} - \bar{p}_\infty^*}{\bar{p}_0^* - \bar{p}_\infty^*} = \frac{1}{1 - c^2\Lambda^2} \left(1 - \frac{\Lambda^2}{\Lambda_\infty^2} \right). \quad (1.2.28)$$

Так как $\bar{p} = p/p_0$, левая часть формул (1.2.27), (1.2.28) — отношение C_p^*/C_{p0}^* , где C_{p0}^* — коэффициент давления в точке торможения потока

для газа Чаплыгина, который согласно (1.2.26) имеет вид

$$C_{p0}^* = \frac{p_0^* - p_\infty}{\rho_\infty^* v_\infty^2 / 2} = \frac{2\sqrt{1 + 4c^2 \lambda_\infty^2}}{1 + \sqrt{1 + 4c^2 \lambda_\infty^2}} = \frac{2}{\rho_\infty^* + 1}. \quad (1.2.29)$$

Теперь из (1.2.28) окончательно получим

$$C_p^* = \frac{C_{p0}^*}{1 - c^2 \Lambda^2} \left(1 - \frac{\Lambda^2}{\Lambda_\infty^2} \right). \quad (1.2.30)$$

Учтем различие в формах обтекаемых тел в газе и несжимаемом фиктивном потоке. Рассмотрим любую линию тока. Вдоль нее

$$d\psi = 0, \quad d\varphi = dw = \frac{dw}{dz_1} dz_1 = \Lambda e^{-i\vartheta} dz_1,$$

и из (1.2.12), (1.2.22) получим, что вдоль линии тока

$$dz = \frac{\Lambda}{\lambda} dz_1 = (1 - c^2 \Lambda^2) dz_1. \quad (1.2.31)$$

В фиктивном несжимаемом потоке произвольным образом введем плотность ρ_i и давление на бесконечности $p_{i\infty}$. Тогда в этом потоке можно ввести поле фиктивных давлений

$$p_i = p_{i\infty} + \frac{\rho_i \Lambda_\infty^2}{2} - \frac{\rho_i \Lambda^2}{2}.$$

Из формул (1.2.34), (1.2.31) следует, что вдоль любой линии тока

$$C_p dz = C_{p0}^* C_{pi}(\Lambda) dz_1, \quad (1.2.32)$$

где

$$C_{pi} = \frac{p_i - p_{i\infty}}{\rho_i \Lambda_\infty^2 / 2} = 1 - \Lambda^2 / \Lambda_\infty^2$$

— коэффициент давления в несжимаемом фиктивном потоке.

1.2.3. Модификация модели газа Чаплыгина. Исследования различных авторов (см., например, [81, п. 24]) показали, что модель газа Чаплыгина дает удовлетворительные результаты в определении поля скоростей, но менее точна в нахождении поля давлений. Поэтому расчет давления следует проводить по найденным значениям λ и точным адиабатическим зависимостям, в частности, расчет коэффициента давления по формуле (1.2.14) — см. приближенную формулу (1.2.26). В этом состоит одна из возможных уточняющих модификаций модели газа Чаплыгина. Отметим, что найденное по (1.2.14) поле давлений уже не будет полем давлений в газе Чаплыгина, однако точность отыскания аэродинамических характеристик при этом повышается.

Формула (1.2.14) довольно громоздкая и неудобная для аналитических исследований. Однако результат, практически совпадающий с вычислением коэффициента давления по (1.2.14), можно получить, если в формуле (1.2.30) заменить коэффициент давления C_{p0}^* в точке

торможения потока для газа Чаплыгина на значение C_{p0} , рассчитанное по точной адиабатической формуле (1.2.14). Из (1.2.3) выведем

$$C_{p0} = \frac{p_0 - p_\infty}{\rho_\infty v_\infty^2 / 2} = \frac{2}{\kappa M_\infty^2} \left[\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2 \right)^{\kappa / (\kappa - 1)} - 1 \right]. \quad (1.2.33)$$

Таким образом, вычислим C_p следующим образом:

$$C_p = \frac{C_{p0}}{C_{p0}^*} C_p^*, \quad (1.2.34)$$

где C_p^* дается формулой (1.2.26), а C_{p0}^* — формулой (1.2.29).

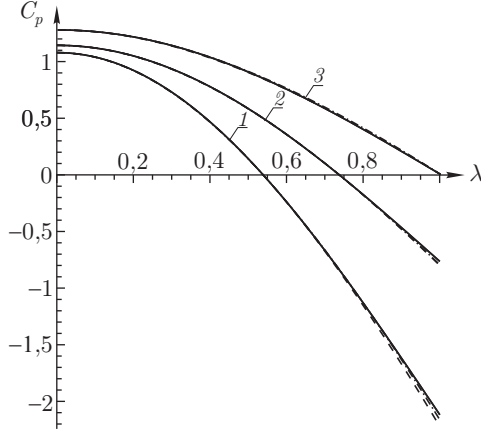


Рис. 1.3. Точные (сплошные линии) и приближенные зависимости $C_p = C_p(\lambda)$: 1 — $M_\infty = 0,5$; 2 — $M_\infty = 0,7$; 3 — $M_\infty = 1$ ($\kappa = 7/5$)

На рис. 1.3 сплошными линиями показаны точные адиабатические зависимости $C_p(\lambda)$, определенные по (1.2.14), а штриховыми и штрихпунктирными — приближенные, вычисленные по (1.2.34). По построению и те, и другие совпадают при $\lambda = \lambda_\infty$, где C_p обращается в нуль, а также при $\lambda = 0$. Штриховые линии построены по способу (1.2.25) выбора c^2 , штрихпунктирные — для $c^2 = 0,296$. Как видно, графики, построенные по точной формуле (1.2.14) и по приближенной формуле (1.2.34), в диапазоне $0 \leq \lambda \leq \lambda_\infty$ практически сливаются. Если c^2 выбрать по (1.2.25), то в этом диапазоне абсолютная погрешность формулы (1.2.34) не превосходит 0,005. Таким образом, формула (1.2.34) оказалась практически эквивалентной формуле (1.2.14).

Коэффициенты давления в формулах (1.2.34) и (1.2.26) при любом способе выбора c^2 различаются лишь постоянным множителем C_{p0}/C_{p0}^* , зависящим только от числа M_∞ . Последнее, в свою очередь, означает, что и подъемные силы крыловых профилей, вычисляемые с помощью (1.2.34) и (1.2.26), будут различаться на тот же постоянный множитель. Так как в газе Чаплыгина справедлива формула

Жуковского для подъемной силы, в предлагаемой модификации модели газа Чаплыгина

$$Y = \frac{C_{p0}}{C_{p0}^*} \rho_{\infty} v_{\infty} \Gamma.$$

Графики зависимостей C_{p0}/C_{p0}^* от M_{∞} приведены на рис. 1.4. Как видно, поправочный множитель C_{p0}/C_{p0}^* достигает наибольших значений при числах Маха на бесконечности близких к единице.

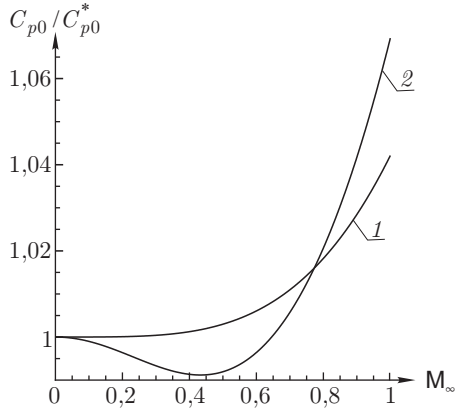


Рис. 1.4. Поправочный множитель C_{p0}/C_{p0}^* как функция M_{∞} для постоянной c^2 , выбранной по способу (1.2.25) (1), и для $c^2 = 0,296$ (2)

Из формул (1.2.34), (1.2.32) следует, что для модифицированной модели газа Чаплыгина вдоль любой линии тока

$$C_p dz = C_{p0} C_{pi}(\Lambda) dz_1. \quad (1.2.35)$$

1.2.4. Формула пересчета коэффициента силы, нормальной к прямолинейной твердой стенке. В ряде случаев формулы (1.2.31), (1.2.32), (1.2.35) позволяют производить пересчет аэродинамических коэффициентов, известных для течения идеальной жидкости, на случай течения газа, без решения каких-либо задач аэродинамики. Пусть AB — прямолинейный участок твердой стенки длины L , являющийся частью границы области дозвукового течения газа. Считаем, что со стороны, противоположной стороне, обтекаемой газом, на AB действует постоянное давление p_{∞} . Обозначим F_n силу, нормальную к стенке AB , C_n — коэффициент нормальной силы. Тогда

$$C_n = \frac{F_n}{L \rho_{\infty} v_{\infty}^2 / 2} = \frac{1}{L} \int_0^L C_p(s) ds,$$

где s — расстояние от точки на стенке AB до конца A .

Рассмотрим прямолинейный отрезок $A'B'$, соответствующий отрезку AB в несжимаемом фиктивном потоке. Коэффициент C_{ni} силы F_{ni} , нормальной к $A'B'$, вычисляется по формуле

$$C_{ni} = \frac{F_{ni}}{L_i \rho_i \Lambda_\infty^2 / 2} = \frac{1}{L_i} \int_0^{L_i} C_{pi}(s_i) ds_i = \frac{1}{L_i} \int_0^{L_i} \left(1 - \frac{\Lambda^2}{\Lambda_\infty^2}\right) ds_i,$$

где L_i — длина отрезка $A'B'$, s_i — расстояние, аналогичное s , в несжимаемой жидкости. Из (1.2.35) выведем

$$C_n = \frac{C_{p0}}{L} \int_0^L C_{pi}(s) ds_i = \frac{C_{p0}}{L} \int_0^{L_i} \left(1 - \frac{\Lambda^2}{\Lambda_\infty^2}\right) ds_i.$$

Но согласно (1.2.31)

$$L = \int_0^{L_i} (1 - c^2 \Lambda^2) ds_i = (1 - \delta^2) L_i + \delta^2 \int_0^{L_i} C_{pi} ds_i = L_i (1 - \delta^2 + \delta^2 C_{ni}),$$

где

$$\delta^2 = c^2 \Lambda_\infty^2 = \left(\frac{2c\lambda_\infty}{1 + \sqrt{1 + 4c^2 \lambda_\infty^2}} \right)^2 = \frac{1 - \bar{\rho}_\infty^*}{1 + \bar{\rho}_\infty^*}. \quad (1.2.36)$$

Отсюда

$$C_n = \frac{C_{p0} C_{ni}}{1 - \delta^2 + \delta^2 C_{ni}}. \quad (1.2.37)$$

Формула (1.2.37) позволяет произвести пересчет коэффициента нормальной силы C_{ni} для несжимаемой жидкости в коэффициент C_n для газа.

Рассмотрим, например, плоскую пластину AB , обтекаемую под углом атаки α по схеме Кирхгофа дозвуковым потоком газа. В несжимаемой жидкости коэффициент нормальной силы вычисляется по формуле Релея (см. [26, с. 83]):

$$C_{ni} = \frac{2\pi \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha}.$$

Формула (1.2.37) сразу дает искомый коэффициент C_n в газе. Если в (1.2.37) заменить C_{p0} на C_{p0}^* , (перейти от модифицированной модели газа Чаплыгина к газу Чаплыгина), выбрать c^2 по способу (1.2.25) и учесть, что при таком выборе

$$\delta^2 = \frac{1 - \bar{\rho}_\infty}{1 + \bar{\rho}_\infty}, \quad C_{p0}^* = \frac{2}{\bar{\rho}_\infty + 1},$$

то из (1.2.37) получим формулу, выведенную С. А. Чаплыгиным [84]:

$$C_n = \frac{2\pi \sin \alpha}{4\bar{\rho}_\infty + \pi \sin \alpha}.$$

Отметим, что формула (1.2.37) по структуре похожа на известную формулу пересчета Кармана–Цзяня [77]

$$C_p = \frac{C_{pi}}{\sqrt{1 - M_\infty^2} + (1 - \sqrt{1 - M_\infty^2})C_{pi}/2},$$

которая, однако, дает связь между локальными коэффициентами давления C_{pi} и C_p . В (1.2.37) производится пересчет интегрального коэффициента C_n и при этом учитываются изменения линейных размеров в газовом и фиктивном потоках.

1.3. Учет вязкости в приближении пограничного слоя

Одним из предположений, использованных при постановке краевых задач для изолированного крылового профиля, было плавное (безотрывное) обтекание. Опишем один из способов обеспечения этого условия, базирующийся на учете вязкости потока в приближении пограничного слоя (ПС).

1.3.1. Условия безотрывного обтекания. Как известно (см., например, [68, 92]), согласно модели пограничного слоя распределение давления по контуру крылового профиля при обтекании его вязкой жидкостью совпадает с распределением давления при обтекании идеальной жидкостью так называемого полутела вытеснения, получаемого наращиванием на профиль и по обе стороны от нулевой линии тока, сходящей с задней кромки, толщины вытеснения δ^* .

В рамках модели ПС отсутствие отрыва потока несжимаемой жидкости гарантируется неравенством ([82], см. также [35, 109])

$$-\frac{v'(s)}{|v(s)|} \delta^{**}(s) \leq B(\text{Re}^{**})^{-1/m}, \quad (1.3.1)$$

где число Рейнольдса $\text{Re}^{**} = \text{Re}^{**}(s) = |v(s)|\delta^{**}(s)/\nu$, $\delta^{**}(s)$ — толщина потери импульса ПС, имеющая различные представления для ламинарного и турбулентного течений (см. ниже), ν — кинематический коэффициент вязкости, B и m — известные взаимосвязанные эмпирические постоянные: для ламинарного ПС

$$B = 0,06-0,08, \quad m = 1;$$

для турбулентного ПС:

$$B = 0,06-0,07, \quad m = 4 \quad \text{по Прандтлю–Бури};$$

$$B = 0,013-0,020, \quad m = 6 \quad \text{по Л. Г. Лойцянскому};$$

$$B = 0,004-0,005, \quad m = \infty \quad \text{по Г. М. Бам-Зеликовичу};$$

$$B = 0,037-0,041, \quad m = 6 \quad \text{по методу Кочина–Лойцянского}.$$

В неравенстве (1.3.1) предполагается, что $v(s)$ — кусочно-гладкая функция, а производная $v'(s)$ имеет не более конечного числа точек

разрыва первого рода, в каждой из которых неравенство (1.3.1) выполнено для соответствующих односторонних пределов.

Пусть ПС на профиле полностью ламинарный. В этом случае по однопараметрическому методу Кочина–Лойцянского

$$[\delta^{**}(s)]^2 = \frac{\nu f(s)}{v'(s)},$$

где формпараметр

$$f(s) = \frac{av'(s)}{|v(s)|^b} \left| \int_{s_*}^s |v(\tau)|^{b-1} d\tau \right|, \quad (1.3.2)$$

s_* — дуговая абсцисса точки разветвления потока, а эмпирические постоянные имеют значения $a = a_l = 0,45$, $b = b_l = 5,35$ (здесь и далее индексом l обозначены значения a и b для ламинарного ПС). Из формулы (1.3.1) выведем теперь критерий безотрывности ламинарного ПС в виде

$$f(s) \geq f_0 = -B, \quad f_0 \in [-0,08, -0,06]. \quad (1.3.3)$$

Для турбулентного пограничного слоя с учетом начального ламинарного участка в [35, 109] получено равенство

$$\delta^{**}(s) = \frac{A|v(s)|f(s)(\text{Re}^{**})^{-1/m}}{v'(s)}, \quad (1.3.4)$$

где формпараметр $f(s)$ имеет вид

$$f(s) = \frac{av'(s)}{|v(s)|^b} \left[\int_{s_{tj}}^s |v(\tau)|^{b-1} d\tau + C_j \right], \quad (1.3.5)$$

$a = (m+1)/m$, $b = 2(4m+1)/(2m-1)$, $A = A(m)$ — постоянная, зависящая от выбора m (например, $A = 0,01256$ при $m = 4$, $A = 0,00653$ при $m = 6$, $A = 0,00598$ при $m = \infty$); s_{tj} — дуговые абсциссы точек перехода ламинарного ПС в турбулентный соответственно на верхней ($j = 1$) и нижней ($j = 2$) поверхностях профиля. Постоянные

$$C_j = \frac{\nu v_{tj}^{b-2} (\text{Re}_{tj}^{**})^a}{aA}, \quad (1.3.6)$$

где $v_{tj} = |v(s_{tj})|$,

$$\text{Re}_{tj}^{**} = \left[0,45\nu^{-1}v_{tj}^{-3,35} \left| \int_{s_*}^{s_{tj}} |v(\tau)|^{4,35} d\tau \right| \right]^{1/2}, \quad (1.3.7)$$

характеризуют вклад в f ламинарных участков. Используя (1.3.1) и выражения (1.3.6), (1.3.7), запишем условие безотрывности турбулентного ПС в виде

$$f(s) \geq f_0 = -\frac{B}{A}, \quad (1.3.8)$$

где $f_0 = (-5,6) - (-4,8)$ по Прандтлю–Бури, $f_0 = (-3) - (-2)$ по Л. Г. Лойцянскому, $f_0 = (-0,8) - (-0,7)$ по Г. М. Бам-Зеликовичу.

В табл. 1.1 приведены уточненные значения эмпирических постоянных a , b и f_0 как для чисто ламинарного, так и для чисто турбулентного ПС, соответствующие результатам работы [55]. Приняты следующие обозначения методов: KL — Кочина–Лойцянского; PB — Прандтля–Бури; L — Лойцянского; BZ — Бам-Зеликовича. Отметим, что в [68, п. 132], указаны следующие наборы эмпирических постоянных: $A = 0,00153$, $m = 6$, $b = 5$ при числе Рейнольдса $Re_\infty = v_\infty L / (2\nu) \geq 5 \cdot 10^6$; $A = 0,037$, $m = 4$, $b = 4,5$ при $Re_\infty < 5 \cdot 10^6$.

Таблица 1.1

Эмпирические постоянные в критериях безотрывности

Тип ПС	Ламинарный ПС	Турбулентный ПС			
Метод	KL	PB	L	BZ	KL
a	0,45	1,25	1,17	1,00	1,17
b	5,35	4,86	4,75	4,00	4,75
f_0	-0,0681	-5,18	-2,53	-0,69	-2,00

Для определения положения точек s_{tj} перехода ламинарного ПС в турбулентный на гладкой поверхности используем эмпирический критерий, предложенный Эпплером [110] и проверенный экспериментально:

$$\ln Re^{**}(s) \geq Re_t = 18,4H_{32} - 21,74. \quad (1.3.9)$$

Здесь $H_{32} = H_{32}(s)$ — один из известных формпараметров ПС, имеющий явное интегральное представление (см., например, [68]) и следующие пределы изменения для ламинарного течения:

$$1,515 \leq H_{32}(s) \leq 1,7. \quad (1.3.10)$$

Таким образом, величины s_{tj} должны быть соответственно ближайшими к s_* корнями уравнения

$$Re^{**}(s_{tj}) = \exp\{18,4H_{32}(s_{tj}) - 21,74\}, \quad j = 1, 2. \quad (1.3.11)$$

Если ПС на профиле полностью турбулентный, то $s_{t1} = s_{t2} = s_*$, $v_{t1} = v_{t2} = 0$. Тогда в силу равенства (1.3.6) имеем $C_1 = C_2 = 0$, а формпараметры в (1.3.2) и (1.3.5) совпадут. Следовательно, совпадет вид условий безотрывности (1.3.3) и (1.3.8) для полностью ламинарного и полностью турбулентного пограничных слоев.

1.3.2. Изменение угла атаки в заданном диапазоне. Критерий (1.3.8) безотрывности турбулентного ПС записан для некоторого фиксированного режима обтекания. Укажем условие, обеспечивающее

безотрывное обтекание профиля при изменении угла атаки α в целом диапазоне $\alpha \in [\alpha_2, \alpha_1]$.

Пусть распределение скорости $v(s)$ реализуется на профиле при его обтекании со скоростью v_∞ на бесконечности под углом атаки $\alpha \in [\alpha_2, \alpha_1]$; $v(s_*) = 0$ в точке s_* разветвления потока, а переход ламинарного течения в турбулентное на верхней и нижней поверхностях профиля происходит на конфузорных участках (участках возрастания скорости) в точках s_{tj} , удовлетворяющих уравнениям (1.3.11). Пусть, далее, $v(s) \equiv v_j(s)$ и $s_* \equiv s_{*j}$ при $\alpha = \alpha_j$, $j = 1, 2$. При указанных предположениях имеет место (см. также [35]) следующая теорема.

Теорема 1.1. Для выполнения критерия (1.3.8) при всех α из интервала $[\alpha_2, \alpha_1]$ достаточно одновременного выполнения неравенств

$$\begin{aligned} f(v_1; s_{*1}, s) &\geq f_0, & s \in [s_{*1}, L], \\ f(v_2; s_{*2}, s) &\geq f_0, & s \in [0, s_{*2}], \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

где

$$f(v; s_{*j}, s) = \frac{av'(s)}{|v(s)|^b} \left| \int_{s_{*j}}^s |v(\tau)|^{b-1} d\tau \right|. \quad (1.3.13)$$

Доказательство. Покажем, что справедлива оценка

$$\frac{f(v; s_{*j}, s)}{v'(s)} \geq \frac{f(s)}{v'(s)}. \quad (1.3.14)$$

Пусть значение s соответствует точкам верхней поверхности профиля (случай нижней поверхности может быть рассмотрен аналогично). В силу условий (1.3.5), (1.3.6) и (1.3.13) для доказательства неравенства (1.3.14) достаточно обосновать оценку

$$C_1 \leq \int_{s_{*1}}^{s_{t1}} [v(\tau)]^{b-1} d\tau, \quad (1.3.15)$$

где постоянная C_1 определена формулой (1.3.6) при $j = 1$. По условиям (1.3.9), (1.3.11) перехода ламинарного течения в турбулентное имеем

$$\text{Re}_{t1}^{**} = c_0 \exp\{18,4 H_{32}[H(s_{t1})]\}. \quad (1.3.16)$$

Учтя, что $b_l > b$ и по предположению $v(s)/v_{t1} \leq 1$ при $s \in [s_*, s_{t1}]$, получим

$$\begin{aligned} \int_{s_{*1}}^{s_{t1}} |v(\tau)|^{b-1} d\tau &= v_{t1}^{b-1} \int_{s_{*1}}^{s_{t1}} \left| \frac{v(\tau)}{v_{t1}} \right|^{b-1} d\tau \geq \\ &\geq v_{t1}^{b-1} \int_{s_{*1}}^{s_{t1}} \left| \frac{v(\tau)}{v_{t1}} \right|^{b_l-1} d\tau = v_{t1}^{b-b_l} \int_{s_{*1}}^{s_{t1}} |v(\tau)|^{b_l-1} d\tau. \end{aligned}$$

Из равенства (1.3.6) следует

$$\int_{s_{*1}}^{s_{t1}} |v(\tau)|^{b_l-1} d\tau = \frac{\nu v_{t1}^{b_l-2} (\text{Re}_{t1}^{**})^2}{a_l}.$$

Используя предыдущее неравенство, получим

$$\int_{s_{*1}}^{s_{t1}} |v(\tau)|^{b_l-1} d\tau \geq \frac{\nu v_{t1}^{b_l-2} (\text{Re}_{t1}^{**})^2}{a_l}.$$

Следовательно, неравенство (1.3.15) будет выполнено, если

$$\frac{\nu v_{t1}^{b_l-2} (\text{Re}_{t1}^{**})^2}{a_l} \geq C_1, \quad \text{т. е.} \quad (\text{Re}_{t1}^{**})^{2-a} \geq \frac{a_l}{aA}.$$

Из условий (1.3.16) и (1.3.10) следует, что

$$(\text{Re}_{t1}^{**})^{2-a} \geq \exp[(2-a)(18,4 \cdot 1,515 - 21,74)] = 462,2^{2-a}.$$

Таким образом, для выполнения неравенства (1.3.15) достаточно, чтобы параметры a и A удовлетворяли ограничению $0,45/(aA) \leq (462,2)^{2-a}$. Проверка этого неравенства для различных наборов параметров a и A , соответствующих различным критериям безотрывности, показала его справедливость. В частности, при $m = 4$ и $m = 6$ имеем соответственно $28,66 < 99,683$ и $58,72 < 162,858$. Итак, неравенство (1.3.14) доказано.

Далее из формулы (1.5.2), связывающей друг с другом распределения скорости при разных углах атаки и выведенной ниже, для произвольного угла атаки $\alpha \in [\alpha_2, \alpha_1]$ имеем

$$\frac{v(s)}{v_\infty} = \begin{cases} v_1(s)R_1(s), & s \in [s_0, L], \\ kv_2(s)R_2(s), & s \in [0, s_0], \end{cases} \quad (1.3.17)$$

где

$$R_j(s) = \cos \delta_j - \sin \delta_j \operatorname{tg} \left[\frac{\gamma(s)}{2} - \beta_j \right], \quad j = 1, 2, \quad (1.3.18)$$

$$\delta_j = \alpha_j - \alpha, \quad \delta_1 \geq 0, \quad \delta_2 \leq 0,$$

а функция $\gamma(s)$ — обратная к $s(\gamma)$. Напомним, что s_0 в формуле (1.3.17) обозначает дуговую абсциссу точки C , разбивающей контур L_z на две части, в каждой из которых задана соответствующая функция $v_1(s)$ или $v_2(s)$, а функция $s = s(\gamma)$ определяет соответствие точек контура профиля и окружности $\zeta = \exp(i\gamma)$, $0 \leq \gamma \leq 2\pi$, в канонической области (см. ниже разд. 1.4). Используя равенство (1.3.18) и соотношение

$$\frac{d\gamma}{ds} = -\frac{v_j(s)}{4u_j} \cos \left[\frac{\gamma(s)}{2} - \beta_j \right] \sin \left[\frac{\gamma(s)}{2} \right],$$

получим

$$R'_j(s) = \frac{v_j(s) \sin \delta_j}{8u_j \sin[\gamma(s)/2] \cos^3[\gamma(s)/2 - \beta_j]}$$

и, следовательно, $R'_1(s) \geq 0$, $R'_2(s) \leq 0$. Так как $R_j(s_*) = 0$, функции $R_j(s)$, $j = 1, 2$, неотрицательны соответственно на интервалах $[s_*, L]$ и $[0, s_*]$. Кроме того, в силу монотонности этих функций имеет место неравенство $R_j(\sigma) \leq R_j(s)$, если $\sigma \in [s_*, s]$ (при $j = 1$) или $\sigma \in [s, s_*]$ (при $j = 2$). Указанные свойства позволяют записать оценку

$$\begin{aligned} [R_j(s)]^{1-b} \left| \int_{s_*}^s |v_j(\tau) R_j(\tau)|^{b-1} d\tau \right| &\leq \left| \int_{s_*}^s |v_j(\tau)|^{b-1} d\tau \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{s_{*j}}^s |v_j(\tau)|^{b-1} d\tau \right|, \quad (1.3.19) \end{aligned}$$

где $s_{*1} \leq s_* \leq s \leq L$ при $j = 1$ и $0 \leq s \leq s_* \leq s_{*2}$ при $j = 2$.

Пусть $v'_1(s) \geq 0$ или $v'_2(s) \geq 0$ при некотором значении s . В силу неотрицательности функций $R_j(s)$ и $v_j(s)R'_j(s)$ имеет место неравенство $v'(s) \geq 0$ — см. (1.3.17). Следовательно, $f(s) \geq 0$ и критерий (1.3.8) выполнен.

Пусть теперь $v'_j(s) < 0$, $j = 1$ или $j = 2$, при некотором $s \in [s_*, L]$ или $s \in [0, s_*]$. Из соотношений (1.3.12), (1.3.17) и (1.3.19) выведем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \frac{v'(s)}{|v(s)|^b} \left| \int_{s_*}^{s_{t1}} |v(\tau)|^{b-1} d\tau \right| &= \frac{v'_j(s)R_j(s) + v_j(s)R'_j(s)}{|v_j(s)R_j(s)|^b} \left| \int_{s_*}^{s_{t1}} |v_j(\tau)R_j(\tau)|^{b-1} d\tau \right| \geq \\ &\geq \frac{v'_j(s)[R_j(s)]^{1-b}}{|v_j(s)|^b} \left| \int_{s_*}^{s_{t1}} |v_j(\tau)R_j(\tau)|^{b-1} d\tau \right| \geq \frac{v'_j(s)}{|v_j(s)|^b} \left| \int_{s_*}^{s_{t1}} |v_j(\tau)|^{b-1} d\tau \right|. \end{aligned}$$

Значит, $0 \geq f(v; s_*, s) \geq f(v_j; s_{*j}, s) \geq f_0$. Используя условие (1.3.14) и учтя, что $v'_j(s) < 0$, получим окончательно

$$f(s) \geq f(v_j; s_{*j}, s) \geq f_0,$$

т.е. критерий (1.3.8) выполнен не только при крайних значениях $\alpha = \alpha_j$ угла атаки, но и при изменении α во всем диапазоне. Теорема доказана.

Замечание 1.1. В формуле (1.3.13) формпараметр $f(v; s_{*j}, s)$ совпадает с функцией $f(s)$ в (1.3.5) в случае $C_j = 0$, т.е. в предположении турбулентности ПС. Следовательно, в теореме утверждается, что для безотрывности обтекания в целом диапазоне достаточно потребовать безотрывности обтекания профиля для крайних значений угла атаки из диапазона, причем не на всем контуре, а на верхней его части при максимальном угле атаки и на нижней части — при минимальном угле, и в предположении турбулентности ПС на всем контуре.

1.3.3. Поток вязкой жидкости или газа с большими числами Рейнольдса. Крыловые профили, оптимизированные в рамках модели ИНЖ, не всегда соответствуют требованиям аэродинамического про-

ектирования хотя бы потому, что при реальном обтекании с их поверхности будет происходить отрыв потока. Кроме того, при движении с достаточно большими скоростями существенную роль играет сжимаемость среды. Следовательно, нужно при оптимизации учитывать вязкость и сжимаемость потока. Для этого нужно выбрать соответствующую математическую модель течения.

Рассмотрим установившееся дозвуковое безотрывное обтекание вязким газом при больших числах Рейнольдса со скоростью v_∞ на бесконечности непроницаемого крылового профиля из введенного выше класса.

Выберем модель течения вязкого газа. Во-первых, будем считать, что влияние вязкости сказывается лишь в тонком ПС около профиля и в расширяющемся следе за ним, причем распределение давления на контуре L_z совпадает с распределением давления на контуре полутела вытеснения при его обтекании внешним невязким потоком. Далее, следуя [81], будем считать, что при дозвуковых скоростях сжимаемостью и теплообменом в ПС можно пренебречь. В силу предположения об отсутствии отрыва потока и с учетом малости толщины вытеснения ПС на профиле и в следе в качестве внешнего потока будем приближенно рассматривать сплошное адиабатическое потенциальное обтекание заданного профиля газом. Наконец, в силу дозвукового характера обтекания учет сжимаемости внешнего потока проведем, используя модель газа Чаплыгина. В итоге приходим к следующей модели течения: профили заданного класса обтекаются потоком газа Чаплыгина, распределение скорости на контуре L_z совпадает с распределением скорости на контуре полутела вытеснения и удовлетворяет условию безотрывности обтекания.

1.4. Обратные краевые задачи аэрогидродинамики

1.4.1. Интегральное представление решения основной задачи.

Запишем интегральное представление решения основной ОКЗА — см. (1.1.16), которое будет далее использовано при постановке и решении вариационных ОКЗА.

В качестве канонической области G_ζ возьмем внешность единичного круга $E^- = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$ во вспомогательной плоскости комплексного переменного $\zeta = r e^{i\gamma}$ (рис. 1.5, б). Рассмотрим обтекание единичного круга потоком ИНЖ, вектор скорости которого на бесконечности направлен вдоль оси абсцисс, модуль равен u , а критические точки $B = e^{-i\beta}$ и $A = -e^{i\beta}$ на окружности (в которых скорость обращается в нуль) симметричны относительно вертикальной оси. Здесь $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$ — так называемый теоретический угол атаки [70], который характеризует отклонение крылового профиля от направления бесциркуляционного обтекания. В основной ОКЗА величина β однозначно определяется по исходным данным задачи (см. ниже).

В вариационных задачах теоретический угол атаки может быть задан заранее или выступает в качестве параметра оптимизации. В случае фиксации β получим дополнительное ограничение при оптимизации.

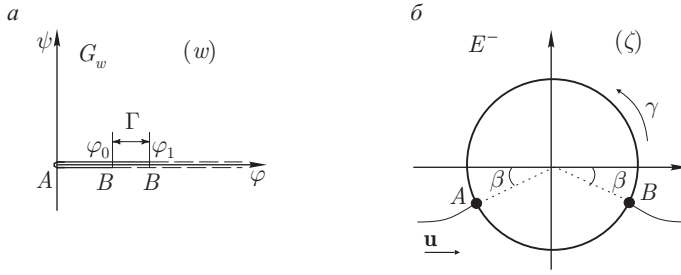


Рис. 1.5. К построению интегрального представления решения основной ОКЗА: a — область значений комплексного потенциала; b — каноническая область во вспомогательной плоскости

Комплексная скорость течения в области E^- , как известно (см., например, [67]), имеет вид

$$\frac{dw}{d\zeta} = u \left(1 - \frac{e^{-i\beta}}{\zeta} \right) \left(1 + \frac{e^{i\beta}}{\zeta} \right).$$

Соответственно комплексный потенциал потока ИНЖ, обтекающего круг $|\zeta| < 1$ со скоростью u на бесконечности и циркуляцией Γ ,

$$w(\zeta) = u (\zeta + \zeta^{-1}) - (2\pi i)^{-1} \Gamma \ln \zeta + C_0, \quad (1.4.1)$$

где C_0 — неизвестная пока комплексная постоянная, а связь Γ , β и u такова:

$$\Gamma = 4\pi u \sin \beta. \quad (1.4.2)$$

Отметим, что функция $w(\zeta)$, нормированная условиями $w(\infty) = \infty$, $w(e^{-i\beta}) = \varphi_1$, конформно отображает E^- на область G_w (рис. 1.5, a), расположенную на бесконечнолистной римановой поверхности над плоскостью w , причем проекция границы этой области определена краевыми условиями (1.1.15). Приняв $\zeta = e^{i\gamma}$ и учтя, что значения потенциала скорости $\tilde{\varphi}(\gamma) = \operatorname{Re}[w(e^{i\gamma})]$ в точках $\zeta = e^{-i\beta}$ и $\zeta = -e^{i\beta}$ (образах задней кромки профиля и передней критической точки) известны ($\tilde{\varphi}(-\beta) = \varphi_1$, $\tilde{\varphi}(\pi + \beta) = 0$), а производная $U(\gamma) = \tilde{\varphi}'(\gamma)$ равна в них нулю, после ряда преобразований получим выражение для постоянной C_0 и уравнение для нахождения β :

$$C_0 = \frac{\varphi_1}{2} + \frac{\Gamma}{4}, \quad (1.4.3)$$

$$\beta + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\pi \varphi_1}{\Gamma} - \frac{\pi}{2}. \quad (1.4.4)$$

Если решается основная ОКЗА с краевым условием (1.1.16), то в силу (1.1.15) будут известны величины φ_1 и Γ (следовательно, и постоянная

C_0), а (1.4.4) служит уравнением для нахождения β , которое разрешимо однозначно. Таким образом, в основной ОКЗА величина теоретического угла атаки однозначно определяется из уравнения (1.4.4). При этом в силу формул (1.4.1), (1.4.3) на единичной окружности получим

$$\tilde{\varphi}(\gamma) = 2u \left[\cos \gamma + \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) \sin \beta \right] + \frac{\varphi_1}{2}. \quad (1.4.5)$$

Покажем теперь, что обтекание рассматриваемого профиля в физической плоскости полностью определяется заданием пары — 2π -периодической функции $P(\gamma) \in L_2[0, 2\pi]$ ($L_2[0, 2\pi]$ — пространство функций, интегрируемых с квадратом на интервале $[0, 2\pi]$), удовлетворяющей некоторым дополнительным условиям гладкости, о которых будет сказано ниже, а также параметра β . Область течения является образом E^- при конформном отображении $z_P = z_P(\zeta)$, нормированном условиями $z_P(\infty) = \infty$, $z_P(e^{-i\beta}) = 0$.

Введем аналитическую функцию

$$\begin{aligned} \chi(\zeta) &= \ln \left[v_\infty^{-1} \frac{dw}{dz}(\zeta) \right] - \chi_1(\zeta), \\ \chi_1(\zeta) &= \ln \left[u^{-1} \frac{dw}{d\zeta}(\zeta) \right] - (\varepsilon - 1) \ln \left(1 - \frac{e^{-i\beta}}{\zeta} \right), \end{aligned}$$

которая получается из функции Мичела–Жуковского удалением особенностей с помощью функции $\chi_1(\zeta)$. При этом $\chi(\infty) = 0$ в силу выбранных условий нормировки скорости потока на бесконечности в физической и вспомогательной плоскостях.

Пусть управляющая функция $P(\gamma) = \operatorname{Re} \chi(e^{i\gamma})$. Тогда по формуле Шварца (см., например, [19])

$$\chi(\zeta) = (\mathbf{S}P)(\zeta) + iC, \quad (\mathbf{S}P)(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\gamma) \frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta} d\gamma, \quad (1.4.6)$$

где $(\mathbf{S}P)(\zeta)$ — оператор Шварца, C — вещественная постоянная. После предельного перехода на границу $\zeta = e^{i\tau}$ получим $\operatorname{Im} \chi(e^{i\tau}) = -(\mathbf{T}P)(\tau) + C$, где сингулярный интеграл (интеграл Гильберта)

$$(\mathbf{T}P)(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\gamma) \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \tau}{2} d\gamma.$$

Для обеспечения его существования потребуем [19, 72], чтобы $P(\gamma)$ удовлетворяла условию Гёльдера с фиксированными коэффициентом и показателем; такие функции образуют в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ компактное множество U .

Напомним, что функция $f(\gamma)$, заданная на интервале $[0, 2\pi]$, называется гёльдеровской (удовлетворяет условию Гёльдера $H(A, \alpha)$ с ко-

эффициентом $A \in (0, \infty)$ и показателем $\alpha \in (0, 1]$, если для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in [0, 2\pi]$ выполнено неравенство

$$|f(\gamma_1) - f(\gamma_2)| \leq A|\gamma_1 - \gamma_2|^\alpha. \quad (1.4.7)$$

При $\alpha = 1$ соотношение (1.4.7) называется условием Липшица. Банахово пространство гёльдеровских функций обозначим C^α .

Далее, в силу нормировки $\chi(\infty) = 0$ имеем $C = 0$, а управляющая функция $P(\gamma)$ должна удовлетворять дополнительному ограничению

$$A_0(P) \equiv \int_0^{2\pi} P(\tau) d\tau = B_0, \quad B_0 = 0. \quad (1.4.8)$$

При этом (с учетом того, что по условию задачи $v_\infty = 1$)

$$\chi(\zeta) = \ln u - \ln \left[\frac{dz_P}{d\zeta} \right] + (\varepsilon - 1) \ln \left(1 - \frac{e^{-i\beta}}{\zeta} \right),$$

т. е.

$$z'_P(\zeta) = u \exp[-\chi(\zeta)] \left(1 - \frac{e^{-i\beta}}{\zeta} \right)^{\varepsilon-1}, \quad (1.4.9)$$

$$|s'(\gamma)| = u G_0(P; \gamma) \quad G_0(P; \gamma) \equiv \exp[-P(\gamma)] \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|^{\varepsilon-1}. \quad (1.4.10)$$

Отсюда после интегрирования с учетом нормировки $z_P(e^{-i\beta}) = 0$ получим интегральное представление класса отображений $z_P(\zeta)$ в зависимости от управляющей функции $P(\gamma)$ и управляющего параметра β и, следовательно, полное описание класса рассматриваемых контуров, который обозначим \mathbf{L} . Естественные, принятые ограничения на элементы \mathbf{L} приведут к дополнительным ограничениям на $P(\gamma)$, β и позволят выявить связи между управляющей функцией и управляющим параметром.

Координаты x , y и длина дуги s контура профиля (отсчитываемая от задней кромки B в направлении, когда область течения остается слева, см. рис. 1.1) определяются теперь из (1.4.9) с учетом 2π -периодичности подынтегрального выражения в параметрической форме как функции параметра $\gamma \in [-\beta, 2\pi - \beta]$ в виде

$$x(\gamma) = \operatorname{Re} z_P(e^{i\gamma}), \quad y(\gamma) = \operatorname{Im} z_P(e^{i\gamma}), \quad (1.4.11)$$

$$s(\gamma) = - \int_{-\beta}^{\gamma} |z'_P(e^{i\gamma})| d\gamma = -u \int_{-\beta}^{\gamma} G_0(P; \gamma) d\gamma, \quad (1.4.12)$$

$$z_P(e^{i\gamma}) = u \int_{-\beta}^{\gamma} G_0(P; \gamma) \exp \left\{ i \left[(\mathbb{T}P)(\gamma) + (\varepsilon - 1) \frac{\gamma + \beta + \pi}{2} \right] \right\} d\gamma.$$

В формулах (1.4.11), (1.4.12) параметр u определяет масштаб длин в физической плоскости. Поэтому величину u определим из условия

задания периметра контура:

$$L = |s(2\pi - \beta)| = u \int_{-\beta}^{2\pi - \beta} G_0(P; \tau) d\tau.$$

Значит, $u = L/I_0(P)$, $\Gamma = 4\pi L \sin \beta / I_0(P)$,

$$I_0(P) = \int_0^{2\pi} G_0(P; \tau) d\tau. \quad (1.4.13)$$

В последнем интеграле пределы интегрирования сдвинуты на $-\beta$, что не влияет на результат интегрирования, поскольку подынтегральная функция 2π -периодическая.

Поле скоростей обтекания рассматриваемого профиля с координатами контура (1.4.11) в физической плоскости z определяет функция

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = e^{\chi(\zeta)} \left(1 + \frac{e^{i\beta}}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{e^{-i\beta}}{\zeta}\right)^{2-\varepsilon}.$$

При этом скорость набегающего потока на бесконечности, как и предполагалось в постановке задачи, равна $v_\infty = \exp[\chi(\infty)] = 1$. Функция $P(\gamma)$ должна обеспечивать замкнутость контура соответствующего профиля, поэтому, как и в [35, п. 2], должны выполняться соответствующие условия. Получим их.

В силу аналитичности комплекснозначной функции $\chi(\zeta)$ ее можно представить в E^- в виде ряда Лорана $\chi(\zeta) = a_0 + a_1/\zeta + a_2/\zeta^2 + \dots$, где

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\tau) d\tau = B_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(\tau) e^{i\tau} d\tau, \dots \quad (1.4.14)$$

Подставив это представление в (1.4.9), проинтегрировав вдоль окружности и приравняв результат нулю, получим

$$\oint \exp \left[-a_0 - \frac{a_1}{\zeta} - \frac{a_2}{\zeta^2} + \dots \right] \left(1 - \frac{e^{-i\beta}}{\zeta}\right)^{\varepsilon-1} d\zeta = 0. \quad (1.4.15)$$

Разложив подынтегральное выражение в (1.4.15) по степеням $1/\zeta$, будем иметь

$$e^{-a_0} \oint \left(1 - \frac{a_1}{\zeta} - (\varepsilon - 1) \frac{e^{-i\beta}}{\zeta} + \dots\right) d\zeta = 0.$$

Следовательно, для обращения этого интеграла в нуль необходимо выполнение равенства $a_1 + (\varepsilon - 1) e^{-i\beta} = 0$. Отсюда с учетом (1.4.14)

получим два условия, которым должна удовлетворять функция $P(\gamma)$ (условия замкнутости искомого контура):

$$A_1(P) \equiv \int_0^{2\pi} P(\tau) \cos \tau \, d\tau = B_1, \quad (1.4.16)$$

$$A_2(P) \equiv \int_0^{2\pi} P(\tau) \sin \tau \, d\tau = B_2, \quad (1.4.17)$$

$$B_1 + i B_2 = -\pi(\varepsilon - 1) \exp(-i\beta).$$

Окончательно, класс **L** рассматриваемых контуров задан конформными отображениями $z = z_P(\zeta)$, определяемыми из (1.4.9), а управляющая функция $P(\gamma)$ удовлетворяет, кроме перечисленных выше, дополнительным ограничениям (1.4.16) и (1.4.17).

Распределение величины скорости на контуре профиля в параметрическом виде может быть представлено в форме

$$v(\gamma) = v_\infty \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|^{2-\varepsilon} G(P, \beta; \gamma), \quad (1.4.18)$$

$$G(P, \beta; \gamma) \equiv 2 \cos \frac{\gamma - \beta}{2} \exp P(\gamma).$$

Для удобства эта величина берется положительной на участке $\gamma \in [-\beta, \pi + \beta]$, соответствующем верхней поверхности контура, и отрицательной на нижней поверхности $\gamma \in [\pi + \beta, 2\pi - \beta]$ (где направление обхода и направление вектора скорости противоположны).

В соответствии с выбранной моделью ИНЖ величины скорости должны быть ограничены. Учитывая, что в силу принципа максимума для аналитических функций наибольшее значение скорости v_{\max} достигается на контуре профиля, для ограничения величины скорости в потоке достаточно потребовать выполнения неравенства $v \leq v_{\max}$ только на контуре L_z . Теперь требование ограниченности максимальной скорости потока заданной величиной v_{\max} в силу (1.4.18) может быть выражено через функцию $P(\gamma)$ и параметр β в виде

$$P(\gamma) \leq H(\gamma) \equiv H_0(\gamma, \beta) + (\varepsilon - 1) \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|, \quad (1.4.19)$$

$$H_0(\gamma, \beta) \equiv \ln \frac{v_{\max}}{M(\gamma, \beta)}, \quad M(\gamma, \beta) = 2 |\sin \gamma + \sin \beta|.$$

Выразим циркуляцию скорости Γ через функцию $P(\gamma)$ и параметр β , используя (1.4.12), (1.4.18) и (1.1.11).

Распределение скорости $U(\gamma) = |dw/d\zeta(e^{i\gamma})|$ на окружности имеет вид $U(\gamma) = u h(\gamma)$, где функция $h(\gamma)$ определяется выбранной топологией течения. В случае контура, непроницаемого всюду,

$$h(\gamma) = 4 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \cdot \left| \cos \frac{\gamma - \beta}{2} \right|,$$

откуда снова следует полученная выше связь (1.4.2) величин Γ и u . Окончательно для коэффициента подъемной силы с учетом (1.1.11), (1.4.2) и (1.4.13) получим

$$C_y = \frac{2\Gamma}{v_\infty L/2} = \frac{16\pi \sin \beta}{I_0(P)}. \quad (1.4.20)$$

Напомним, что теоретический угол атаки β характеризует отклонение профиля от направления обтекания с нулевой подъемной силой. В частности, при $\beta = 0$, естественно, имеем $C_y = 0$.

Итак, как видим, пара $P(\gamma)$, β действительно полностью определяет геометрию профиля и его обтекание потоком ИНЖ и потому ее следует использовать в качестве управляющей функции и управляющего параметра при оптимизации.

В заключение покажем, что в основной ОКЗА функция $P(\gamma)$ сразу определяется по начальным данным задачи. Уравнение, однозначно определяющее теоретический угол атаки β , выведено выше и имеет вид (1.4.4).

В соответствии с методом сопоставления плоскостей значения потенциалов скорости в первоначальном и преобразованном потоках, взятые в точках, соответствующих друг другу, совпадают. Так как функции $\tilde{\varphi}(\gamma)$ и $\varphi(s)$ непрерывны, из сопоставления выражений (1.1.14) и (1.4.5) установим непрерывную зависимость $s = s(\gamma)$, $\gamma \in [-\beta, 2\pi - \beta]$. Далее, из соотношения

$$s'(\gamma) \equiv \frac{u(\gamma)}{\varphi'[s(\gamma)]} = -\frac{2u(\sin \gamma + \sin \beta)}{v[s(\gamma)]} \quad (1.4.21)$$

в силу кусочной гладкости функции $v(s)$ следует, что производная $s'(\gamma)$ гёльдеровская всюду, за исключением, быть может, точек γ , соответствующих нулям функции $v[s(\gamma)]$. Таковыми являются $\gamma = \gamma_* = \pi + \beta$, а также $\gamma = -\beta$ и $\gamma = 2\pi - \beta$ при $\varepsilon \neq 2$.

Так как по предположению функция $v'(s)$ непрерывна в точке s_* разветвления потока, в точке $\gamma = \gamma_*$ производная $s'(\gamma)$ непрерывна, причем $s'^2(\gamma) \sim 2u \cos \beta / v'[s(\gamma)]$. Учтя, что $v(s)$ обращается в нуль порядка $2/\varepsilon - 1$ в задней кромке, из формулы (1.4.21) получим

$$s(\gamma) \sim [\varphi_1 - \tilde{\varphi}(\gamma)]^{\varepsilon/2} \sim \left(2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2}\right)^\varepsilon, \quad \gamma = -\beta, \quad \gamma = 2\pi - \beta.$$

Следовательно, $s'(\gamma) \sim [2 \sin((\gamma + \beta)/2)]^{\varepsilon-1}$ в задней кромке.

Таким образом, ограничения, наложенные на распределение $v(s)$ в постановке обратной задачи, гарантируют, что $s(\gamma)$ будет непрерывно-дифференцируемой функцией, обладающей гёльдеровской производной, которая отлична от нуля всюду, за исключением точек $\gamma = -\beta$, $\gamma = 2\pi - \beta$, где производная $s'(\gamma)$ имеет нули порядка $\varepsilon - 1$. Теперь из формулы (1.4.10) легко найти соответствующую функцию $P(\gamma)$. При этом нужно учесть, что $u = \Gamma/(4\pi \sin \beta)$ при $\beta \neq 0$ и $u = \varphi_1/4$ при $\beta = 0$; последнее равенство следует из (1.4.4) в пределе при $\beta \rightarrow 0$.

1.4.2. Условия разрешимости. Под условиями разрешимости в теории ОКЗА (см. [35]) понимают условия замкнутости искомого контура L_z , условие совпадения заданного значения скорости v_∞ со значением, определяемым в процессе решения, а также условия физической реализуемости получаемого решения (в частности, условия однолистности области течения). История вывода условий разрешимости ОКЗА подробно описана в [12, 34, 35, 109].

Условия замкнутости искомого контура эквивалентны требованию однозначности функции $z(\zeta)$ (отсутствию логарифмической особенности), что будет достигнуто, если приравнять нулю вычет $c_{-1} = \operatorname{res}_{\zeta=\infty} (dz/d\zeta)$. В результате вычислений, проведенных в п. 1.4.1, условия замкнутости контура L_z получены в виде (1.4.16), (1.4.17). Далее, если учесть, что

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \Big/ \frac{dz}{d\zeta}, \quad \frac{dw}{d\zeta} = u \left(1 - \frac{e^{-i\beta}}{\zeta} \right) \left(1 + \frac{e^{-i\beta}}{\zeta} \right),$$

и устремить ζ к бесконечности, найдем, что величина скорости на бесконечности будет совпадать с заданным значением $v_\infty = 1$ только тогда, когда выполняется равенство (1.4.8).

Таким образом, в явном виде получены линейные интегральные равенства (1.4.8), (1.4.16) и (1.4.17) — основная группа условий разрешимости, выраженных через управляющую функцию $P(\gamma)$ и теоретический угол атаки β . Так как для произвольных начальных данных ОКЗА эти условия могут не выполняться, исходная задача является некорректной. Для ее регуляризации разработана соответствующая теория квазирешений (см. [35], гл. 2 и гл. 3).

Постановка основной ОКЗА не включает в себя требование однолистности решения, а представление (1.4.9) позволяет найти контуры, которые, вообще говоря, будут простыми лишь на многолистных римановых поверхностях. Поэтому требование однолистности является необходимым условием физической реализуемости решения поставленной задачи.

Даже если условия (1.4.8), (1.4.16) и (1.4.17) выполнены, найденный контур L_z может оказаться самопересекающимся. Значит, чтобы обеспечить физическую реализуемость решения ОКЗА, нужно установить признаки однолистности области течения G_z . Кроме того, их желательно выразить непосредственно через распределение скорости $v(s)$. В то же время существуют функции $v(s)$, которым заведомо соответствуют неоднолистные решения задачи. Такие распределения должны быть исключены из рассмотрения, т.е. множество всех исходных функций $v(s)$ должно быть сужено. Это сужение можно осуществить, использовав тот или иной признак однолистности.

Достаточные условия однолистности обеспечивают принадлежность искомой области G_z множеству областей с определенными геометрическими свойствами (например, с выпуклым или звездным

дополнением), построены для случая угловой задней кромки ($\varepsilon < 2$) и подробно описаны в обзорах [5, 6]. Как правило, они выражаются не через распределение скорости $v(s)$, а через управляющую функцию $P(\gamma)$. Значительно бóльшие трудности возникают при построении условий однолистности для профилей с бесконечно тонкой задней кромкой ($\varepsilon = 2$). В этом случае контур профиля не является квазиконформной кривой

Достаточные условия однолистности характеризуют лишь некоторые подклассы из множества однолистных решений, и поэтому их использование приводит к значительному сужению множества допустимых функций $P(\gamma)$. Целесообразнее сузить это множество за счет исключения из него части не однолистных решений, используя **необходимые условия однолистности**. Укажем некоторые из них, достаточно просто выражающиеся через функцию $P(\gamma)$.

Рассмотрим множество крыловых профилей с бесконечно тонкой задней кромкой ($\varepsilon = 2$), ограниченных ляпуновскими контурами L_z , кривизна которых всюду ограничена. Ф. Г. Авхадиев [4] показал, что достаточным для не однолиственности области течения является условие

$$v_{01}(\gamma) - v_{02}(2\pi - \gamma) \leq 2v_0(0), \quad \gamma \in [0, \pi]. \quad (1.4.22)$$

Здесь $v_0(\gamma) = v[s(\gamma)]$ – распределение скорости, соответствующее бесциркуляционному режиму обтекания, $v_{01}(\gamma) = v_0(\gamma)$ при $\gamma \in [0, \pi]$ (на верхней поверхности L_z), $v_{02}(\gamma) = v_0(\gamma)$ при $\gamma \in [\pi, 2\pi]$ (на нижней поверхности). Из неравенства (1.4.22) естественно следует, что для однолистных профилей недопустимы монотонно возрастающие распределения $v_0(s)$.

Из сказанного следует, что для простых замкнутых контуров L_z необходимо выполнение следующего неравенства, обратного (1.4.22),

$$\max_{\gamma \in [0, \pi]} [v_{01}(\gamma) - v_{02}(2\pi - \gamma)] > 2v_0(0),$$

принимаящего в выражении через функцию $P(\gamma)$ вид

$$\max_{\gamma \in [0, \pi]} \left\{ \cos \frac{\gamma}{2} \cdot [e^{P(\gamma)} + e^{P(2\pi - \gamma)} - 2e^{P(0)}] \right\} > 0. \quad (1.4.23)$$

При выполнении (1.4.23) будет также справедливо неравенство

$$\max_{\gamma \in [0, \pi]} \left\{ \left| \cos \frac{\gamma}{2} \right| \exp[P(\gamma)] \right\} > \exp[P(0)], \quad (1.4.24)$$

эквивалентное условию

$$\max_{\gamma \in [0, \pi]} v_0(\gamma) > v_0(0).$$

В силу (1.4.22) оно также является необходимым условием однолистности, но определяет более широкое, чем (1.4.23), множество допустимых функций $P(\gamma)$. Отметим, что в случае симметричных профилей условия (1.4.23) и (1.4.24) совпадают.

Далее, для однолистности решения ОКЗА необходимо выполнение неравенства [3]

$$|\mu(\varphi + \Delta\varphi) + \mu(\varphi - \Delta\varphi) - 2\mu(\varphi)| \leq 12|\Delta\varphi| \quad (1.4.25)$$

для любых пар φ и $\Delta\varphi$, в которых φ , $\varphi \pm \Delta\varphi \in [a, b]$. Здесь

$$\mu(\varphi) = \int_0^\varphi \ln v[s(\varphi)] d\varphi, \quad \varphi \in [a, b],$$

$s = s(\varphi)$ — функция, обратная (1.1.14), а величины a и b должны быть такими, чтобы интервалу $[a, b]$ соответствовал некоторый участок монотонности функции $\varphi(s)$.

Отметим, что невыполнение неравенства (1.4.25) для любой фиксированной тройки точек φ , $\varphi + \Delta\varphi$, $\varphi - \Delta\varphi$ означает, что решение ОКЗА наверняка будет неоднолистным. Названное свойство позволило строго доказать, что в ОКЗА существуют такие распределения-ловушки $v(s)$, заданные на некотором интервале, в результате которых при любом доопределении скорости на остальных участках однолистное решение не существует (примером распределения-ловушки служит упомянутое выше монотонное распределение скорости).

1.4.3. Аэродинамические характеристики. В обратной задаче требуется найти не только форму профиля, но и его аэродинамические характеристики. В том случае, когда для исходных данных обратной задачи условия разрешимости удовлетворены, проблем с нахождением скорости и коэффициента давления нет: зависимость $v(s)$ задана, поэтому соответствующее распределение C_p находится по формуле $C_p = 1 - (v/v_\infty)^2$, вытекающей из уравнения Бернулли (1.1.5). При этом распределение скорости $v(\gamma)$ имеет вид (1.4.18).

Далее, величина Y подъемной силы определяется формулой (1.1.9). Эта формула характеризует следующую интересную особенность обратной задачи. Задав желаемое распределение $v(s)$ на профиле, а также величины v_∞ и ρ_∞ , мы тем самым зафиксировали величину подъемной силы этого профиля и в силу (1.1.11) еще до решения задачи можем оценить значение коэффициента подъемной силы. Это означает, что максимизацию циркуляции Γ (и подъемной силы Y) можно осуществить за счет выбора функции $v(s)$.

Как отмечено выше, модель ИНЖ позволяет связать аэродинамические характеристики профиля, рассчитанные для разных режимов обтекания. Поясним это.

Пусть α, v_∞ — исходные угол атаки и величина скорости на бесконечности. Найдем аэродинамические характеристики для других значений α_1 и $v_{\infty 1}$ этих величин.

В силу конформности отображения $z_P(\zeta)$ при изменении угла атаки на величину $\delta = \alpha_1 - \alpha$ имеем

$$z_{P1}(\zeta) = e^{-i\delta} z_P(\zeta) \quad \text{или} \quad \frac{dz_{P1}}{d\zeta} = e^{-i\delta} \frac{dz_P}{d\zeta}$$

(здесь и далее индексом 1 отмечены величины, соответствующие режиму течения с параметрами α_1 и $v_{\infty 1}$). Тогда условия на бесконечности $dw/dz|_{\infty} = v_{\infty}$ и $dw_1/dz_1|_{\infty} = v_{\infty 1}$ приведут к равенству

$$\frac{u_1}{v_{\infty 1}} e^{-i\beta_1} = \frac{u}{v_{\infty}} e^{-i\delta}$$

или

$$\beta_1 = \beta + \delta, \quad u_1 = \frac{uv_{\infty 1}}{v_{\infty}}. \quad (1.4.26)$$

Таким образом, при изменении угла атаки на величину δ теоретический угол атаки β изменится на ту же величину, а скорость на бесконечности в канонической области — пропорционально изменению скорости в физической области. Так как при повороте профиля функция $s(\gamma)$ (следовательно, и $P(\gamma)$) сохранится, новое распределение скорости на профиле может быть найдено по формуле

$$v_1(\gamma) = 2v_{\infty 1} \cos \frac{\gamma - \beta_1}{2} \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta_1}{2} \right|^{2-\varepsilon} \exp P(\gamma). \quad (1.4.27)$$

Из сравнения выражений в (1.4.27) и (1.4.18) получим, что распределения скорости при различных режимах обтекания связаны соотношением

$$\frac{v_1(\gamma)}{v(\gamma)} = v_{\infty 1} \cos \frac{\gamma - \beta_1}{2} \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta_1}{2} \right|^{2-\varepsilon} / \left[v_{\infty} \cos \frac{\gamma - \beta}{2} \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|^{2-\varepsilon} \right], \quad (1.4.28)$$

а циркуляции скорости — равенством $\Gamma_1 = \Gamma v_{\infty 1} \sin \beta_1 / (v_{\infty} \sin \beta)$. Отсюда следует $C_{y1} = C_y \sin \beta_1 / \sin \beta$.

1.4.4. Решение по модели газа Чаплыгина. В качестве одного из краевых условий на искомом контуре аналогично (1.1.16) зададим распределение скорости $\lambda = \lambda(s)$, удовлетворяющее тем же ограничениям, что и в основной ОКЗА по модели ИНЖ. В качестве канонической области G_{ζ} в плоскости ζ , как и ранее, возьмем внешность единичного круга (см. рис. 1.5, б), а в качестве вспомогательной функции — аналитическую в G_{ζ} функцию $\chi_0 = \ln(dw/dz) = S - i\vartheta$, где ϑ — аргумент вектора скорости. Так как область G_w в плоскости w при использовании модели газа Чаплыгина сохраняет тот же вид, что и для модели идеальной несжимаемой жидкости (рис. 1.5, а), функция $w(\zeta)$ определится формулой (1.4.1) с последующим нахождением параметра β из уравнения (1.4.4) и величины C_0 по формуле (1.4.3). Учтя поведение скорости $\lambda(s)$ в окрестностях точек A и B , аналогично случаю модели ИНЖ нетрудно показать, что функция χ_0 будет иметь логарифмические особенности в точках обращения скорости в нуль (в $\zeta = \zeta_*$ и

при $\varepsilon \neq 2$ в точке $\zeta = e^{-i\beta}$, причем $\chi_0(\zeta) \sim (2 - \varepsilon) \ln(\zeta - e^{-i\beta})$ при $\zeta \rightarrow e^{-i\beta}$ и $\varepsilon \neq 2$; $\chi_0(\zeta) \sim \ln(\zeta - \zeta_*)$ при $\zeta \rightarrow \zeta_*$. Зависимость $s(\gamma)$ найдем из сопоставления функций $\tilde{\varphi}(\gamma) = \operatorname{Re} w(e^{i\gamma})$ — см. (1.4.5) и

$$\varphi(s) = \int_{s_*}^s \lambda(s) ds.$$

Интегральное представление решения основной ОКЗА по модели газа Чаплыгина строится аналогично случаю ИНЖ (см. [35, 109]). Единственное отличие будет состоять в квазиконформности отображения $z = z_P(\zeta)$, что является следствием формулы (1.2.21). После восстановления функции $\chi_0(\zeta)$ во внешности круга контур искомого профиля может быть построен по формуле (при подстановке в нее $\zeta = \exp(i\gamma)$)

$$\begin{aligned} z_P(\zeta) &= \int_{e^{-i\beta}}^{\zeta} \exp[-\chi_0(\zeta)] w'(\zeta) d\zeta - c^2 \overline{\exp[\chi_0(\zeta)] w'(\zeta) d\zeta} = \\ &= u \int_{e^{-i\beta}}^{\zeta} \exp[-\chi(\zeta)] \left(1 - \frac{e^{-i\beta}}{\zeta}\right)^{\varepsilon-1} d\zeta - \\ &\quad - c^2 \overline{\exp[\chi(\zeta)] \left(1 - \frac{e^{-i\beta}}{\zeta}\right)^{3-\varepsilon} \left(1 + \frac{e^{i\beta}}{\zeta}\right)^2 d\zeta}, \quad (1.4.29) \\ \chi(\zeta) &= (\mathbf{S}P)(\zeta), \end{aligned}$$

$$P(\gamma) = S(\gamma) - S_0(\gamma); \quad S_0(\gamma) = \ln M(\gamma, \beta) - (\varepsilon - 1) \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|.$$

Отметим, что при $c^2 = 0$ из (1.4.29) вытекает представление, равносильное (1.4.9). Далее, несмотря на то, что функция $z_P(\zeta)$ не является аналитической (это связано с дополнительным слагаемым в (1.4.29), учитывающим сжимаемость газового потока), вид условий разрешимости задачи сохранится, изменятся лишь постоянные B_0 , B_1 , B_2 в (1.4.8), (1.4.16) и (1.4.17):

$$\begin{aligned} B_0 &= 2\pi \ln \Lambda_\infty, \\ B_1 + i B_2 &= -4\pi i \sin \beta \frac{c^2 \Lambda_\infty^2}{1 + c^2 \Lambda_\infty^2} - \pi(\varepsilon - 1) e^{-i\beta}, \end{aligned} \quad (1.4.30)$$

где

$$\Lambda_\infty = \Lambda(\lambda_\infty), \quad \Lambda(\lambda) = 2\lambda[1 + (1 + 4c^2\lambda^2)^{1/2}]^{-1}.$$

1.5. Диапазон углов атаки

Приведенная выше постановка ОКЗА предполагает построение крыловых профилей, обладающих заданными свойствами при некотором расчетном угле атаки. С практической точки зрения важной является задача проектирования профилей, имеющих желаемые аэродинамиче-

ские характеристики при изменении угла атаки в некотором заданном диапазоне. Математическим выражением этой проблемы является ОКЗА для диапазона углов атаки.

Если форма крылового профиля известна, то, находясь в рамках какой-либо выбранной модели, можно связать распределения скорости вдоль контура профиля при любых значениях угла атаки α и величины v_∞ скорости набегающего потока. Такая связь наиболее проста при использовании модели ИНЖ и имеет вид (1.4.27), где $v_1(\gamma)$, $v_{\infty 1}$ и β_1 — распределение скорости и параметры, соответствующие новому режиму обтекания. Поэтому нужные свойства профиля при изменении угла атаки в заданном диапазоне могут быть охарактеризованы за счет специального выбора распределений скорости на контуре профиля, соответствующих некоторому конечному числу значений угла атаки из указанного диапазона, в частности, его крайним значениям. Эти распределения и должны быть исходными в обратной задаче.

Приведем постановку ОКЗА для диапазона углов атаки и опишем схему построения интегрального представления решения, которое используем ниже при решении оптимизационных задач.

1.5.1. Постановка основной задачи. В физической плоскости z (рис. 1.6, *a*) искомый непроницаемый крыловой профиль обтекается установившимся потоком ИНЖ. Контур L_z профиля имеет периметр L и удовлетворяет требованиям постановки ОКЗА из разд. 1.4. Хорда профиля направлена вдоль оси x выбранной системы координат. Дуговая координата s отсчитывается от $s = 0$ в точке B до $s = L$ в ней же так, что при возрастании s область течения остается слева. На контуре L_z выбрана точка C с координатой s_0 , разбивающая его на два участка.

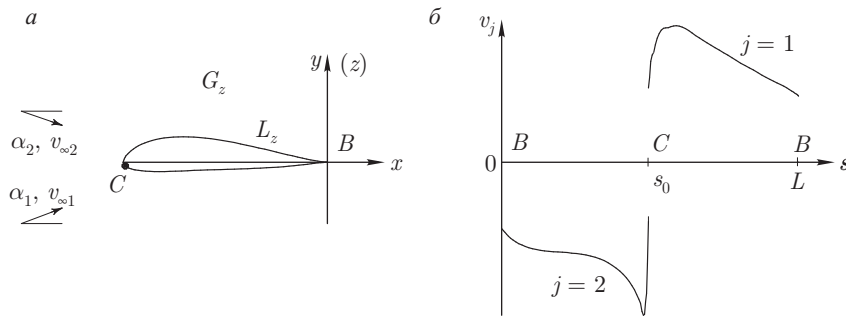


Рис. 1.6. К постановке ОКЗА для диапазона углов атаки: *a* — физическая плоскость; *б* — распределения скорости $v_j(s)$, $j = 1, 2$, для крайних значений угла атаки из заданного диапазона (случай $\varepsilon = 2$)

Пусть $v_{\infty 1}$ и $v_{\infty 2}$ — скорости невозмущенного течения при обтекании профиля под углами атаки α_1 и α_2 . Известными считаются величины $\delta = \alpha_1 - \alpha_2 > 0$, $v_{\infty 1}$ и $k = v_{\infty 1}/v_{\infty 2}$. Вдоль контура профиля

соответственно на интервалах $[0, s_0]$ и $[s_0, L]$ заданы распределения скорости потока $v_j(s)$, $j = 1, 2$, для режимов обтекания с параметрами α_j и $v_{\infty j}$ (рис. 1.6, б):

$$v_1(s) = (L - s)^{2/\varepsilon - 1} (s - s_{*1})^{n_1} v_1^*(s), \quad s \in [s_0, L],$$

$$v_2(s) = -s^{2/\varepsilon - 1} (s_{*2} - s)^{n_2} v_2^*(s), \quad s \in [0, s_0],$$

где $v_j^*(s)$ — положительные непрерывные функции, гладкие в точках s_{*j} . Параметры n_1 и n_2 принимают значения 0 или 1, $0 \leq n_1 + n_2 \leq 1$ и характеризуют различные схемы задания исходных данных. Величины s_{*1} и s_{*2} при $n_1 \neq 0$, $n_2 \neq 0$ определяют положение точек A_j разветвления потока на контуре при каждом из режимов обтекания. Знаки $v_j(s)$ связаны с направлением обхода контура и поэтому $v_2(s) < 0$ при $s \in (0, s_{*2})$, $v_1(s) > 0$ при $s \in (s_{*1}, L)$; значения $v_2(0)$ и $-v_1(L)$ строго отрицательны при $\varepsilon = 2$ (бесконечно тонкая кромка, см. рис. 1.6, б)), $v_2(0) = v_1(L) = 0$ при $\varepsilon \in [1, 2)$. В силу условия $\delta > 0$ должно выполняться неравенство $s_{*2} > s_{*1}$. Если $n_2 = 1$ и $n_1 = 0$, то $s_0 \geq s_{*2}$ (схема 1). Случаю $n_1 = 1$ и $n_2 = 0$ соответствует неравенство $s_0 \leq s_{*2}$ (схема 2). При $n_1 = n_2 = 0$ функции $v_j(s)$ знакопостоянны (схема 3). Указанные схемы задания исходных данных при $\varepsilon = 2$ представлены на рис. 1.7 (случаи а–в соответственно).

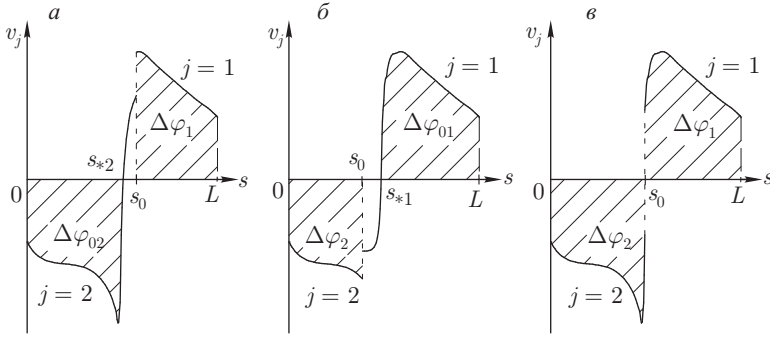


Рис. 1.7. Схемы задания исходных данных при $\varepsilon = 2$: а — $n_1 = 0$, $n_2 = 1$, $s_{*2} \leq s_0 < L$; б — $n_1 = 1$, $n_2 = 0$, $0 < s_0 < s_{*1}$; в — $n_1 = n_2 = 0$, $s_{*1} \leq s_0 \leq s_{*2}$

Требуется определить форму профиля, его хорду, углы атаки α_j и коэффициенты подъемной силы C_{yj} для обоих режимов обтекания.

1.5.2. Интегральное представление решения. Отметим, что в основной ОКЗА для диапазона углов атаки при применении способа сопоставления плоскостей более удобной является следующая нормировка конформного отображения $z = z_P(\zeta)$: $z_P(\infty) = \infty$, $z_P(1) = 0$. При этом независимо от выбранного угла атаки задней кромке профиля всегда соответствует точка $\zeta = 1$ на единичной окружности. Такой выбор нормировки существенно не влияет на процедуру построения ре-

шения, но значительно упрощает формулы. В частности, соотношение (1.4.28) принимает вид

$$v_1(\gamma) = \frac{v_{\infty 1} \cos(\gamma/2 - \beta_1)}{v_{\infty} \cos(\gamma/2 - \beta)} v(\gamma).$$

Переход к рассмотренному ранее случаю осуществляется заменой переменных $\zeta \mapsto e^{-i\beta} \zeta$ ($\gamma \mapsto \gamma - \beta$).

Итак, пусть функция $z = z_P(\zeta)$ конформно отображает область $E^- = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$ на внешность профиля, $z_P(\infty) = \infty$, $z_P(1) = 0$. Для нахождения $z_P(\zeta)$ достаточно определить соответствие $s = s(\gamma)$ точек контура профиля и окружности $\zeta = e^{i\gamma}$, $\gamma \in [0, 2\pi]$, причем функция $s(\gamma)$ должна быть гладкой, строго убывающей и в силу наложенных выше ограничений иметь представление (1.4.12), где $P(\gamma)$ — гёльдеровская функция.

Пусть $w_j(z)$, $j = 1, 2$, — комплексные потенциалы течений при обтекании профиля под углами атаки α_j со скоростями набегающего потока $v_{\infty j}$. Рассмотрим функцию

$$\ln \frac{dz_P}{d\zeta} = \ln \left(\frac{dz_P}{dw_1} \frac{dw_1}{d\zeta} \right) = \ln \left(\frac{dz_P}{dw_2} \frac{dw_2}{d\zeta} \right),$$

где функции $w_j(\zeta)$, $j = 1, 2$, — комплексные потенциалы обтекания круга единичного радиуса в плоскости ζ — см. (1.4.1). Разделив ее действительную и мнимую части при $\zeta = \infty$ и $\zeta = e^{i\gamma}$, получим равенства (см. также формулы (1.4.26), (1.4.28)):

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2 = \delta, \quad \frac{u_1}{u_2} = \frac{v_{\infty 1}}{v_{\infty 2}} = k, \quad (1.5.1)$$

$$\frac{v_1[s(\gamma)]}{v_2[s(\gamma)]} = k \frac{\cos(\gamma/2 - \beta_1)}{\cos(\gamma/2 - \beta_2)}, \quad \gamma \in [0, 2\pi], \quad (1.5.2)$$

где

$$u_j \exp(-i\beta_j) \equiv \left. \frac{dw_j}{d\zeta} \right|_{\zeta=\infty}.$$

При отображении $z_P(\zeta)$ прообразами на единичной окружности точек A_j разветвления потока на контуре при каждом из режимов обтекания будут точки $\zeta_j = \exp[i(\pi + 2\beta_j)]$, $j = 1, 2$. Пусть $\zeta_0 = \exp[i(\pi + 2\beta_0)]$ — прообраз точки C , а Γ_j — величины циркуляций скорости. Обозначим

$$\varphi_1(s) = \int_s^L v_1(s) ds, \quad s \in [s_0, L], \quad \varphi_2(s) = \int_0^s v_2(s) ds, \quad s \in [0, s_0],$$

$$\Delta\varphi_1 = \varphi_1(s_0), \quad \Delta\varphi_2 = |\varphi_2(s_0)|,$$

$$\Delta\varphi_{0j} = |\varphi_j(s_{*j})| \quad \text{при} \quad n_1 \neq 0 \quad \text{или} \quad n_2 \neq 0,$$

Величины $\Delta\varphi_j$ и $\Delta\varphi_{0j}$, $j = 1, 2$, определяют площади эпюр распределений $v_j(s)$ на соответствующих интервалах (заштрихованы на рис. 1.7).

Теперь потенциалы скорости при обтекании круга с точками разветвления потока ζ_j и точкой схода $\zeta = 1$ имеют вид (см. (1.4.5))

$$\tilde{\varphi}_j(\gamma) = 2u_j \left[2 \sin \left(\frac{\gamma}{2} - \beta_j \right) \sin \frac{\gamma}{2} + \gamma \sin \beta_j - \Gamma_j(j-1) \right], \quad j = 1, 2,$$

причем $\Gamma_j = 4\pi u_j \sin \beta_j$, согласно условию Жуковского–Чаплыгина–Кутта.

Для разрешимости задачи необходимо, чтобы строго убывающая функция $s = s(\gamma)$, устанавливающая граничное соответствие областей течения вне L_z и в G_ζ , удовлетворяла уравнениям

$$\begin{aligned} \varphi_1(s) &= \tilde{\varphi}_1(\gamma), & s &\in [s_0, L], & \gamma &\in [0, \pi + 2\beta_0], \\ \varphi_2(s) &= \tilde{\varphi}_2(\gamma), & s &\in [0, s_0], & \gamma &\in [\pi + 2\beta_0, 2\pi], \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

которые выражают условия совпадения потенциалов скорости на окружности и на контуре профиля. Если уравнения (1.5.3) разрешимы, то, найдя из них функцию $s(\gamma)$ вида (1.4.12), можно записать интегральное представление функции $z = z_P(\zeta)$ в виде (1.4.9).

Итак, исходная задача сведена к нахождению монотонной функции $s(\gamma)$ из уравнений (1.5.3). Очевидно, что для произвольных исходных распределений скорости $v_j(s)$ свойство монотонности этой функции может быть не обеспечено, как, впрочем, и вообще разрешимость уравнений. Для обеспечения названных свойств исходные данные задачи должны удовлетворять дополнительным ограничениям, которые назовем **условиями совместимости начальных данных**.

1.5.3. Условия совместимости начальных данных и разрешимости. Перечислим сначала те соотношения, которые позволят записать условия совместимости начальных данных:

— функции $\varphi_j(s)$ и $\tilde{\varphi}_j(\gamma)$ одновременно должны иметь не более двух участков монотонности, причем

$$\varphi_1(L) = \tilde{\varphi}_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = \tilde{\varphi}_2(2\pi) = 0;$$

— должны выполняться равенства

$$\varphi_1(s_0) = \tilde{\varphi}_1(\pi + 2\beta_0), \quad \varphi_2(s_0) = \tilde{\varphi}_2(\pi + 2\beta_0),$$

выражающие условия совпадения левой и правой частей в (1.5.3) на концах участков монотонности;

— значения левой и правой частей в (1.5.2) должны быть равны соответственно при $\gamma = 0$, $\gamma = 2\pi$ и $\gamma = \pi + 2\beta_0$.

Найдя затем зависимость $s = s(\gamma)$, восстановим функцию $z = z_P(\zeta)$, как это указано в предыдущем разделе. Однако выполнение условия совместимости начальных данных не обеспечит однозначности функции $z_P(\zeta)$ (следовательно, замкнутости искомого контура L_z), а также совпадения величины $v_{\infty 1}$, определяемой в ходе решения, со значением, заданным в постановке задачи. Для обеспечения этих

свойств необходимо и достаточно выполнения условий разрешимости ОКЗА — см. (1.4.16), (1.4.17).

Сформулируем окончательный результат (см. [35, 109]).

Теорема 1.2. При заданных значениях δ и k параметры $\beta_0, \beta_1, \beta_2, u_{01}, u_{02}$, характеризующие искомое решение, однозначно определяются по начальным данным задачи формулами

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \beta_1 + \operatorname{arccotg}(a^* \operatorname{cosec} \delta - \operatorname{ctg} \delta), \quad \beta_1 = \operatorname{arctg}(a_* \operatorname{cosec} \delta - \operatorname{ctg} \delta), \\ \beta_2 &= \beta_1 - \delta, \quad u_1 = 0,5 \Delta \varphi_1 [2 \cos \beta_0 \cos(\beta_1 - \beta_0) + (\pi + 2\beta_0) \sin \beta_1]^{-1}, \\ u_2 &= 0,5 \Delta \varphi_2 [2 \cos \beta_0 \cos(\beta_2 - \beta_0) + (2\beta_0 - \pi) \sin \beta_2]^{-1},\end{aligned}$$

где

$$a_* = \frac{kv_2^*(0) s_{*2}^{n_2}}{v_1^*(L)(L - s_{*1})^{n_1}}, \quad a^* = \frac{kv_2(s_0)}{v_1(s_0)}.$$

Для разрешимости ОКЗА необходимо выполнение следующих условий совместимости начальных данных: равенства $u_1 = ku_2$ для всех трех схем задания исходных данных и дополнительных соотношений

$$\begin{aligned}2u_2[2 \cos \beta_0 + (2\beta_2 - \pi) \sin \beta_2] &= \Delta \varphi_{02} && \text{при } s_0 \neq s_{*2}, \\ v_1^2(s_0) &= 8k^2 u_2 \cos \beta_2 \sin^2 \delta v_2'(s_0) && \text{при } s_0 = s_{*2}\end{aligned}$$

для схемы 1;

$$\begin{aligned}2u_1[2 \cos \beta_0 + (\pi + 2\beta_1) \sin \beta_1] &= \Delta \varphi_{01} && \text{при } s_0 \neq s_{*1}, \\ k^2 v_2^2(s_0) &= 8u_1 \cos \beta_1 \sin^2 \delta v_1'(s_0) && \text{при } s_0 = s_{*2}\end{aligned}$$

для схемы 2.

При этих условиях функция $z = z_P(\zeta)$, дающая решение задачи, имеет интегральное представление (1.4.9), где плотность $P(\gamma)$ находится из уравнения (1.5.3). Принадлежность функции $z_P(\zeta)$ заданному классу решений гарантируется условиями разрешимости (1.4.16), (1.4.17).

Итак, получены соотношения, выраженные через начальные данные ОКЗА и определяющие как схему задания распределений $v_j(s)$, так и совместимость этих распределений. При выполнении этих соотношений для построения решения ОКЗА необходимо удовлетворить условиям разрешимости (1.4.16), (1.4.17). Поэтому для получения замкнутого контура L_z в неизменном виде может быть применен метод квазирешений по схеме, изложенной в гл. 2.

Замечание 1.2. Задание распределений $v_j(s)$ в случае построения симметричных профилей представляет большие трудности, так как условие симметрии накладывает дополнительные ограничения на функции $v_j(s)$, $j = 1, 2$. Если же

$$s_0 = L/2, \quad k = 1, \quad v_2(s) = -v_1(L - s), \quad s \in [0, L/2],$$

то таким исходным данным всегда соответствует симметричный контур, причем $\beta_1 = -\beta_2 = \delta/2$, $\beta_0 = 0$, а условие совместимости начальных данных выполняется тождественно.

1.5.4. Обобщенная параметризация распределений скорости.

Вернемся к постановке основной ОКЗА для диапазона углов атаки, выбрав схему 3 задания исходных распределений скорости (см. рис. 1.7, в), считая заднюю кромку B бесконечно тонкой и введя обобщенную координату η , $0 \leq \eta \leq L$, позволяющую однозначно параметризовать искомый контур. Пусть по-прежнему точка C делит искомый контур на две части и имеет координату $\eta = \eta_0$. На интервалах $[0, \eta_0]$ и $[\eta_0, L]$ заданы распределения скорости $v_j(\eta) > 0$, $j = 1, 2$, характеризующие обтекание искомого профиля соответственно со скоростями $v_{j\infty}$ набегающего потока для углов атаки α_j . Все скорости будем относить к величине $v_{1\infty}$, которая, как и величины $\delta = \alpha_1 - \alpha_2 \geq 0$ и $k = v_{1\infty}/v_{2\infty}$, считается известной. Отыскиваются форма профиля и его аэродинамические характеристики.

Если $\eta = s$, L — периметр искомого контура, то имеем основную ОКЗА для диапазона углов атаки. При $\eta = \gamma$, $L = 2\pi$ получим параметризацию на единичной окружности во вспомогательной плоскости. Если $\eta = x$, $L = b$, имеем так называемую задачу по хордовой диаграмме скорости (в этом случае интервалы $[0, \eta_0]$ и $[\eta_0, L]$ задания функций $v_j(\eta)$ совпадают и равны $[0, b]$).

Идея решения ОКЗА для диапазона углов атаки с обобщенной параметризацией распределений скорости базируется на способе сопоставления плоскостей и интегральном представлении конформного отображения $z = z_P(\zeta)$. При этом

$$P(\gamma) = \ln \left| \frac{U_j(\gamma)}{v_j[\eta(\gamma)]} \right|, \quad U_j(\gamma) = -2u_j \cos \left(\frac{\gamma}{2} - \beta_j \right), \quad (1.5.4)$$

$$\gamma \in [0, \pi + 2\beta_0] \quad \text{при} \quad j = 1, \quad \gamma \in [\pi + 2\beta_0, 2\pi] \quad \text{при} \quad j = 2,$$

и, следовательно, для решения задачи достаточно найти функцию $\eta = \eta(\gamma)$, $\gamma \in [0, 2\pi]$. Отметим, что независимо от вида параметра η остается в силе утверждение теоремы 1.2 об определении параметров β_0 , β_1 и β_2 . Вместе с тем в отличие от основной ОКЗА при произвольном выборе параметра η нельзя приравнять друг другу потенциалы скорости течения в физической и вспомогательной плоскостях и получить функцию $\eta = \eta(\gamma)$ и выражения для u_1 и u_2 , хотя условие $u_1/u_2 = k$ совместимости начальных данных остается в силе. Для нахождения функции $\eta(\gamma)$ в общем случае служит интегродифференциальное уравнение вида (см. также [106])

$$\eta'(\gamma) = (\mathbf{F}\eta)(\gamma) \equiv \mathbf{F}[x'(\gamma), y'(\gamma)](\gamma), \quad (1.5.5)$$

где $x(\gamma) + iy(\gamma) = z(e^{i\gamma})$, а \mathbf{F} — оператор специального вида (в частных случаях его вид указан ниже). При этом параметры u_1 и u_2

должны быть подобраны так, чтобы обеспечить заданные длины интервалов изменения η и указанное условие совместимости. Рассмотрим некоторые интересные частные случаи уравнения (1.5.5).

Пусть $\eta = \gamma$. В этом случае уравнение (1.5.5) выполняется тождественно, а ограничением на заданные распределения $v_j(\gamma)$ служит условие $u_1/u_2 = k$. Отметим, что указанная параметризация широко используется при проектировании гидропрофилей (см., например, [110]).

Пусть теперь

$$[\eta'(\gamma)]^2 = [x'(\gamma)]^2 + [y'(\gamma)]^2,$$

т.е. $\eta = s$. Тогда (1.5.5) сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} s'(\gamma) = \frac{2U_1(\gamma) \sin(\gamma/2)}{v_1[s(\gamma)]}, & \gamma \in [0, \pi + 2\beta_0], \\ s'(\gamma) = \frac{2U_2(\gamma) \sin(\gamma/2)}{v_2[s(\gamma)]}, & \gamma \in [\pi + 2\beta_0, 2\pi], \end{cases}$$

которая равносильна системе соотношений (1.5.3) и результат о разрешимости которой содержит теорема 1.2.

Наконец, пусть

$$\eta(\gamma) = x(\gamma), \quad \gamma \in [0, \pi + 2\beta_0]; \quad \eta(\gamma) = -x(\gamma), \quad \gamma \in [\pi + 2\beta_0, 2\pi].$$

Это задача по хордовой диаграмме скорости, а уравнение (1.5.5) принимает вид

$$x(\gamma) = u_j \int_{\pi+2\beta_0}^{\gamma} \frac{U_j(\gamma) \cos[\vartheta(\gamma) + C]}{v_j[x(\gamma)]} d\gamma \equiv u_j \Pi[x(\gamma), C](\gamma), \quad (1.5.6)$$

$$\gamma \in [0, \pi + 2\beta_0] \quad \text{при} \quad j = 1; \quad \gamma \in [\pi + 2\beta_0, 2\pi] \quad \text{при} \quad j = 2.$$

Здесь функция $\vartheta(\gamma)$ восстанавливается интегралом Гильберта с плотностью $\ln v_j[x(\gamma)]$ и, следовательно, является оператором от искомой функции $x = x(\gamma)$, а C — некоторая постоянная, влияющая на ориентацию искомого профиля относительно выбранной системы координат. Функция $x(\gamma)$ должна быть непрерывной (что обеспечивается видом оператора Π), иметь два участка монотонности и удовлетворять условиям

$$x(0) = b, \quad x(2\pi) = b, \quad x'(\pi + 2\beta_0) = 0. \quad (1.5.7)$$

Соотношение (1.5.6) вместе с (1.5.7) можно рассматривать как систему уравнений для отыскания функции $x(\gamma)$ и значений u_{01} , u_{02} и C .

Таким образом, получен явный вид интегродифференциального уравнения задачи, но построить в явном виде его решение не удастся. В этом случае достаточно эффективной оказалась итерационная процедура, подробно описанная в [36, 106].

1.6. Вариационные обратные краевые задачи

Во введении была дана используемая нами трактовка термина «вариационные обратные краевые задачи». Теперь подробнее поясним схему постановки таких задач.

Как известно [12, 89], в ОКЗ для аналитических функций, моделирующих обтекание тел идеальной несжимаемой жидкостью, краевые условия

$$w(z)|_{L_z} = \varphi(s) + i\psi(s), \quad s \in [0, L],$$

определяют уравнение контура L_w , ограничивающего образ искомой области течения G_z при отображении искомой функцией (комплексным потенциалом) $w(z) = \varphi + i\psi$. Уравнение контура L_w можно задать в эквивалентной форме в виде $\Phi(\varphi, \psi) = 0$, где Φ удовлетворяет требованиям теоремы о неявной функции. Если при этом сохранить, например, краевое условие $\varphi = \varphi(s)$, $s \in [0, L]$, то получим формулировку ОКЗ, равносильную исходной. Если же последнее условие заменить требованием, чтобы на искомом решении достигал экстремального значения заданный функционал J (возможно, при некоторых дополнительных ограничениях), то получим формулировку новой задачи, которая и называется вариационной ОКЗ. В общем случае функционал J должен выражать некоторое вариационное свойство как искомой области G_z , так и функции $w(z)$. Поэтому для корректной постановки таких задач необходимо заранее зафиксировать класс искомых решений.

Имеется много различных примеров вариационных ОКЗ. Так, в работе [10] поставлены и решены несколько таких задач на классе однолистных областей G_z , причем функционал J выражает определенное изопериметрическое свойство. Решенные в работе [66] задачи также относятся к рассматриваемому классу. Ряд ярких результатов по решению вариационных ОКЗА получен в теории струйных и кавитационных течений, при решении оптимизационных задач теории фильтрации с депрессионными кривыми, при построении оптимальных аэродинамических форм при сверх- и гиперзвуковых скоростях (обзор результатов и библиографию см. в [24, 25, 35, 63, 65, 69]).

Эти и другие примеры показали, что вариационные ОКЗ не всегда разрешимы. Например, если искомые функции $w(z)$, определенные в неограниченных областях G_z , имеют в окрестности бесконечности представление

$$w(z) = z + c_1 \ln z + \sum_{k=2}^{\infty} c_k z^{-k},$$

где c_1 — вещественный параметр, причем разомкнутый контур L_w — образ L_z при отображении $w(z)$ является частью заданного ограниченного замкнутого контура L_0 с уравнением $\Phi(\varphi, \psi) = 0$, а

$$J = \left| \int_{L_z} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz \right|,$$

то $J = 2\pi|c_1|$. Следовательно, требование $J \rightarrow \max$ эквивалентно нахождению диаметра L_0 . Значит, величина c_1 может быть определена заранее, причем не всегда однозначно, и исходная задача имеет бесчисленное множество решений, так как отсутствует условие для нахождения оставшихся произвольных коэффициентов c_k , $k \geq 2$. Таким образом, важной является проблема описания класса допустимых функционалов J , гарантирующих корректность вариационных ОКЗ.

В изученных к настоящему времени вариационных ОКЗ для аналитических функций корректность задач удается исследовать, если множество искомых областей можно задать в виде множества образов канонической области (в частности, внешности единичного круга $E^- = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$) для специального класса конформных или квазиконформных отображений, описываемого управлением P . Перейдя к канонической области, можно представить функционал задачи в виде $J = J(P)$ и записать на языке управления P все дополнительные ограничения.

1.7. Исторические замечания и библиографические ссылки

1.7.1. Модель идеальной несжимаемой жидкости. Модель ИНЖ является классической и описана почти во всех учебниках по механике. Она обладает тем свойством, что потенциал скорости потока в исходной области течения после конформного преобразования переходит в потенциал скорости потока в преобразованной области с сохранением значений потенциала скорости в первоначальном и преобразованном потоках в точках, соответствующих друг другу при конформном преобразовании.

Способ сопоставления плоскостей широко распространен в механике сплошных сред и теории краевых задач с неизвестными границами (см., например, монографии М. И. Гуревича [26], Г. Биркгофа и Э. Сарантонелло [16]) и заключается в следующем. Если имеем краевую задачу в области с неизвестной (частично неизвестной) границей для функции (системы функций), являющейся решением уравнения (системы уравнений) в частных производных эллиптического типа (в частности, для аналитической функции), то с помощью замены переменных, связанной с конформным или квазиконформным отображением искомой области на вспомогательную каноническую область, например, единичный круг, внешность единичного круга или полуплоскость, получаем новую краевую задачу для новой искомой функции, но уже в области с известной границей. Наиболее эффективен этот прием, когда речь идет об аналитических функциях, так как при конформных отображениях свойство аналитичности сохраняется, а в случае простых краевых условий (например, постоянства вещественной или мнимой части комплексного потенциала) сохраняется и само краевое условие

на границе канонической области. Все сказанное применимо при исследовании течений идеальной несжимаемой жидкости. Отметим, что в краевых задачах аэрогидродинамики, описанных в настоящей главе, в качестве канонической области традиционно используется внешность единичного круга, в то время как, например, в краевых задачах теории фильтрации таковой служит верхняя полуплоскость.

Задача Шварца является одной из базовых краевых задач в комплексном анализе и заключается в нахождении функции, аналитической в заданной области, по значениям ее действительной части на границе области при определенных ограничениях на эти значения и свойствах гладкости границы области (см., например, монографии Н. И. Мусхелишвили [72] и Ф. Д. Гахова [19]). В частности, если функция $\chi(\zeta)$, аналитическая в единичном круге $G_\zeta = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$, имеет почти всюду на единичной окружности $|\zeta| = 1$ предельные значения, причем $\operatorname{Re} \chi(e^{i\gamma}) = P(\gamma)$, $P(\gamma)$ — заданная интегрируемая функция, то

$$\chi(\zeta) = (SP)(\zeta) + iC, \quad (SP)(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\gamma) \frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta} d\gamma,$$

где $(SP)(\zeta)$ — оператор Шварца, C — вещественная постоянная.

1.7.2. Постановка краевых задач. Прямыми называют краевые задачи, в которых требуется найти функцию или систему функций, удовлетворяющих в заданной области дифференциальному уравнению в частных производных или системе таких уравнений, а на границе области — заданному краевому условию. В обратных краевых задачах (ОКЗ), входящих в класс краевых задач с неизвестными границами, в классической их постановке искомая граница области (или отдельные ее участки) и искомая функция отыскиваются по двум краевым условиям на неизвестных участках границы и одному краевому условию — на известных участках. Некоторые из ОКЗ некорректны по Адамару. Однако иногда условия разрешимости этих задач удается выразить в явном виде и при их выполнении обосновать существование единственного и устойчивого решения.

Основные заслуги в создании теории ОКЗ как раздела математического анализа и математической физики принадлежат Г. Г. Тумашеву, М. Т. Нужиному, Ф. Д. Гахову, С. Н. Андрианову, а также Л. А. Аксентьеву, В. Н. Монахову, Р. Б. Салимову и М. И. Хайкину. Основные направления приложений методов этой теории в механике сплошных сред разработаны Г. Г. Тумашевым, М. Т. Нужиным, Н. Б. Ильинским, О. М. Киселевым, В. В. Клоковым, Р. Б. Салимовым и другими. Прикладные ОКЗ (и прежде всего ОКЗА) послужили, с одной стороны, отправной точкой в создании математической теории таких задач, и, с другой стороны, требуют самостоятельных детальных исследований в силу значительной их специфики. Простота постановок

в сочетании с разнообразными граничными условиями и интересными геометрическими свойствами решений привлекает к ним внимание специалистов как по краевым задачам, так и по прикладной математике.

Теория и приложения ОКЗ отражены в ряде обзорных изданий [5, 6, 12, 19, 34, 57, 71, 74, 76, 81, 89, 108, 110, 118, 126, 128, 129, 138].

Теория сингулярных интегралов, понимаемых в смысле главного значения по Коши и входящих в интегральные представления решений ОКЗ для аналитических функций, изложена в монографиях [19, 72].

1.7.3. Учет сжимаемости и вязкости потока при дозвуковом течении. Условия безотрывности обтекания. Разработке методов учета сжимаемости газа в различных задачах аэродинамики посвящено много работ (см., например, библиографию в [27, 79]). Значительная их часть связана с созданием вычислительных алгоритмов решения дифференциальных уравнений, описывающих адиабатическое движение идеального газа. Другой подход состоит в замене исходных уравнений более простыми, т.е. в переходе от реального течения к течению фиктивного газа, но с близкими параметрами. Естественно, что такие методы дают приближенное решение, но простота получаемых уравнений приводит к существенному упрощению процедуры поиска результата. Один из приближенных методов учета сжимаемости базируется на линейных уравнениях газовой динамики, записанных в плоскости годографа скорости — уравнениях Чаплыгина [91].

С.А. Чаплыгин [91] предложил два метода решения системы (1.2.13): точный и приближенный. Точный метод может быть применен к достаточно широкому классу задач о течениях сжимаемой жидкости, ограниченных свободными поверхностями и полигональными твердыми стенками. Обзор работ, выполненных в этом направлении, можно найти в монографиях [26, 83].

Модель газа, описанная в п. 1.2.2, впервые предложена С.А. Чаплыгиным [91].

Наиболее полный учет вязкости и сжимаемости среды дает применение уравнений Навье–Стокса. Значительно упростить модель обтекания можно, если учесть, что обычно обтекание крыльев происходит при больших ($\sim 10^5$ – 10^6) числах Рейнольдса, при этом вязкость будет сказываться лишь в достаточно тонком слое воздуха. Поэтому ее учет проводят в рамках модели пограничного слоя.

Уточнение эмпирических постоянных в условиях безотрывности (1.3.8) с использованием данных аэродинамических атласов профилей проведено в работе [55].

Теорема 1.1, выражающая достаточное условие безотрывности в диапазоне углов атаки, доказана в [103, 104] (см. также [109]). Это строго доказанное утверждение является обоснованием эмпирического наблюдения, отмеченного ранее многими авторами.

Описанные выше классические критерии безотрывности являются приближенными, и к настоящему времени разработаны более точные,

но, соответственно, и более сложные теории. Однако эти критерии достаточно хорошо согласуются с уточненными теориями, а простота определяет преимущество их использования в краевых задачах математической физики.

1.7.4. Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. Обратные краевые задачи аэрогидродинамики (ОКЗА) составляют часть общей теории обратных краевых задач. Суть ОКЗА заключается в определении формы крылового профиля (изолированного, многокомпонентного или являющегося элементом решетки) по заданному на его поверхности распределению давления (или скорости), обеспечивающему требуемые аэрогидродинамические характеристики. На практическую важность решения таких задач исследователи обратили внимание в конце 1920-х — начале 1930-х гг. К этому времени уже были существенно развиты методы решения прямых краевых задач аэрогидродинамики и все чаще стали возникать проблемы конструирования профиля, обладающего заданными свойствами. Математическими выражениями таких проблем и явились ОКЗА.

Первые постановки ОКЗА дали Вейниг [134, 135], Бетц [100] и Манглер [123], а затем Г.Г. Тумашев [86, 88], и вскоре упоминания об этих задачах и описания их постановок вошли в ставшие классическими монографии по аэродинамике Бетца [101] и Прандтля [125]. Одновременно Глауэртом, Эпплером, Лайтхиллом, Г. Ю. Степановым, а несколько позднее Вортманом и Либеком и другими исследователями (см. [166–173] и библиографию в [35, 81, 109, 110]) были начаты работы по практическому проектированию профилей и их решеток на базе решения ОКЗА. Достигнутые в этой области существенные результаты послужили в дальнейшем основой методов проектирования ламинарных профилей (работы Эпплера и Вортманна), гидропрофилей (статьи Эпплера и Шена), лопаток турбомашин (исследования Г. Ю. Степанова), высоконесущих профилей (работы Либека). Эти достижения позволили говорить об определенных преимуществах такого подхода при проектировании и поставить его в один ряд с классическими методами, основанными на решении прямой задачи. Однако оставались открытыми такие важные теоретические вопросы, как корректность постановок задач, описание возможных решений и другие. Ответы на них непосредственно связаны с изучением ОКЗА как объектов единого класса обратных краевых задач. Такие исследования были проведены в 1980-х гг., их результаты отражены в монографиях [35, 36, 109]. Описание достижений по ОКЗА до 1980 г. содержится в монографии [89] и обзоре [12]. Библиография и обзоры методов решения отдельных ОКЗА содержатся также в обзорных изданиях, указанных в п. 1.7.2.

Условия разрешимости (1.4.8), (1.4.16) и (1.4.17) по существу содержатся в работе Бетца [100] и подробно выведены в статьях Манглера [123], Лайтхилла [120] и Г.Г. Тумашева [88].

Наиболее полные результаты по решению проблемы однолистности в основной ОКЗА по модели ИНЖ получены методами теории аналитических функций и основаны на исследовании свойств интегральных представлений вида (1.4.9) — см. обзорные работы [5, 6].

Достаточные условия однолистности обеспечивают принадлежность искомой области G_z множеству областей с определенными геометрическими свойствами (например, с выпуклым или звездным дополнением). Такие условия построены для случая угловой задней кромки ($\varepsilon < 2$), подробно описаны в обзорах [5, 6]. Как правило, они выражаются не через распределение скорости $v(s)$, а через вспомогательную функцию $P(\gamma)$.

Термин распределения-ловушки для обозначения распределений скорости, гарантирующих получение неоднолистной области течения, ввел Ф. Г. Авхадиев [3, 4].

1.7.5. Решение по моделям газа Чаплыгина и ПС. Решение и условия разрешимости основной ОКЗА в приближении газа Чаплыгина дано Г. Г. Тумашевым [87, 88] (см. также [89]). Используя приближенные уравнения Чаплыгина, Вудс — см. [137, п. 6] получил, как и Г. Г. Тумашев, аналоги условий разрешимости, совпадающие с ними в случае несжимаемого течения.

Аппроксимация Чаплыгина при решении различных ОКЗА использована А. А. Шагаевым, Костелло, Г. Ю. Степановым. Описание этих и других близких результатов и соответствующие библиографические ссылки можно найти в монографии [81] и обзоре [34, п. 8].

Впервые способ учета влияния вязкости по модели ПС при решении ОКЗА предложил Г. Ю. Степанов [81].

Учет явления отрыва ПС при решении ОКЗА осуществлен с использованием модели [21, 22], которая включает модели локального отрыва турбулентного ПС и сильного вязко-невязкого взаимодействия в ближнем следе. Согласно этой модели ПС на профиле и в следе за ним делится на следующие области: безотрывный ПС, область формирования отрыва, изобарическая область, ближний след и дальний след. При этом распределение скорости вдоль верхней поверхности полутела на безотрывном участке совпадает с исходным $v(s)$, в области формирования отрыва оно изменяется линейно, в изобарической области — постоянно, а в ближнем следе выполняется нелинейное краевое условие, связывающее величину и аргумент скорости. Решение ОКЗА в рамках названной модели получено А. Н. Ильинским и А. В. Поташевым (библиографию и описание результатов см. в [35, 36]).

1.7.6. Диапазон углов атаки. История постановки и исследования ОКЗА для диапазона углов атаки подробно изложена в [35] (см. также [110]) и связана с именами Лайтхилла, Глауэрта, Эпплера, Н. Ю. Завадовского, С. В. Мелешко и А. А. Русецкого, а также с нашими исследованиями [47, 48, 103, 104, 106].

1.7.7. Вариационные обратные краевые задачи. Термин «вариационные обратные задачи», ввел Л. А. Аксентьев [10] для обозначения класса задач, рассмотренного в начале п. 1.6. Л. А. Аксентьевым описана также схема перехода от ОКЗ к вариационным обратным задачам и даны решения некоторых из них на классе однолистных аналитических функций. Так как по своей постановке названные задачи примыкают к ОКЗ, в докторской диссертации первого из авторов настоящей книги и позже в [35, 36] эти задачи названы вариационными ОКЗ. Подмножеством задач этого класса являются вариационные ОКЗА. К ним можно отнести многие задачи, исследованные ранее, в частности, вариационные задачи газовой динамики, изученные Г. Г. Черным, Ю. Д. Шмыглевским, А. Л. Гонором, А. Н. Крайко [24, 25, 63, 65, 84, 93, 94].

Примеры реализации схемы решения вариационных ОКЗА, описанной в разд. 1.6, содержатся в [1, 2, 9, 44, 90, 97, 102]. Результаты, связанные с основной вариационной ОКЗА (задачей построения профиля максимальной подъемной силы при ограничении на максимум скорости на его контуре) и некоторыми ее обобщениями (в частности, на случай обтекания профиля вблизи прямолинейного экрана) представлены в работах [30, 36, 39, 40, 43, 49–52, 105, 107].

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ КВАЗИРЕШЕНИЙ

2.1. Существование и единственность квазирешений

2.1.1. Простейшие способы удовлетворения условий разрешимости. Один из способов добиться выполнения условий разрешимости ОКЗА заключается в использовании в качестве исходных данных многопараметрических семейств распределений $v(s)$. Этот способ был применен рядом авторов при решении ОКЗА в рамках различных гидродинамических моделей (см., например, обзор [34]). Отметим, что введение свободных параметров, с одной стороны, позволяет рассмотреть сразу целый класс исходных распределений скорости, но, с другой стороны, сводит решение задачи к подбору подходящих исходных данных и существенному изменению первоначальной постановки ОКЗА. Вместе с тем, в отличие от эмпирических приемов модификации исходных данных задачи, такой способ решения является конструктивным.

Другой способ удовлетворения условий разрешимости состоит в целенаправленной модификации исходного распределения $v(s)$. Остановимся на описании соответствующих результатов.

Пусть $P(\gamma)$ — один из элементов рассматриваемого множества управляющих функций, $P_d(\gamma)$ — конкретная функция, определяющая решение основной ОКЗА — (1.4.9) и найденная по краевым условиям обратной задачи (этот факт отражен введением индекса d в обозначении функции). Представим 2π -периодические управляющие функции $P(\gamma)$ в виде рядов Фурье по тригонометрической системе

$$P(\gamma) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos k\gamma + d_k \sin k\gamma), \quad \gamma \in [0, 2\pi]. \quad (2.1.1)$$

В силу гёльдеровости функций $P(\gamma)$ ряды (2.1.1), как известно (например, [60]), сходятся к ним равномерно. Соотношения (1.4.8), (1.4.16) и (1.4.17) означают фиксацию трех первых коэффициентов в выпisanном разложении, т. е. должны выполняться равенства

$$c_0 = \pi^{-1} B_0, \quad c_1 = \pi^{-1} B_1, \quad d_1 = \pi^{-1} B_2.$$

Очевидно, что названные условия разрешимости будут выполнены, если от исходной функции $P_d(\gamma)$ перейти к модифицированной функции $P_*(\gamma)$ по правилу

$$P_*(\gamma) = P_d(\gamma) + T(\gamma), \quad T(\gamma) = \pi^{-1} \left(\frac{C_0}{2} + C_1 \cos \gamma + C_2 \sin \gamma \right), \quad (2.1.2)$$

где

$$C_0 = B_0 - \pi c_0, \quad C_1 + i C_2 = B_1 + i B_2 - \pi(c_1 + i d_1).$$

Такой способ модификации, предложенный Манглером [123], означает, что в случае невыполнения условий разрешимости нужно заменить значения соответствующих коэффициентов в (2.1.1) на нужные, «исправив», тем самым задачу и, следовательно, модифицировав исходное распределение скорости. Из формул (2.1.2) и (1.4.18) следует, что измененное $v_*(\gamma)$ и исходное $v(\gamma)$ распределения скорости (как функции полярного угла γ единичной окружности) связаны равенством

$$v_*(\gamma) = v(\gamma) \exp[T(\gamma)].$$

Аналогично можно удовлетворить условия разрешимости, допуская изменение исходного распределения не на всем контуре, а только на некоторой его части, например, на фиксированном участке нижней поверхности.

Предположим, что исходные данные ОКЗА модифицируются только на интервале $[\gamma_1, \gamma_2] \subseteq [0, 2\pi]$ и

$$T(\gamma) = \begin{cases} \sum_{k=1}^3 D_k f_k(\gamma), & \gamma \in [\gamma_1, \gamma_2], \\ 0, & \gamma \notin [\gamma_1, \gamma_2], \end{cases} \quad (2.1.3)$$

где D_1, D_2, D_3 — некоторые постоянные, $f_k(\gamma)$, $k = \overline{1, 3}$, — линейно независимые функции, заданные на интервале $[\gamma_1, \gamma_2]$ и обращающиеся в нуль на его концах. Из условий (1.4.16) и (1.4.17) выведем систему линейных уравнений для определения постоянных D_k :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 D_k \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f_k(\tau) d\tau &= B_0 - \int_0^{2\pi} P_d(\tau) d\tau, \\ \sum_{k=1}^3 D_k \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f_k(\tau) \cos \tau d\tau &= B_1 - \int_0^{2\pi} P_d(\tau) \cos \tau d\tau, \\ \sum_{k=1}^3 D_k \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f_k(\tau) \sin \tau d\tau &= B_2 - \int_0^{2\pi} P_d(\tau) \sin \tau d\tau. \end{aligned}$$

В частном случае, когда $[\gamma_1, \gamma_2] = [0, 2\pi]$, $f_1(\gamma) = \cos \gamma$, $f_2(\gamma) = \sin \gamma$ и $f_3 = 1$, из (2.1.3) следует формула (2.1.2).

Описанные простейшие способы удовлетворения условий разрешимости ОКЗА позволяют предложить следующую схему рассуждений, характеризующую некорректность задачи и указывающую возможные пути регуляризации ее решения.

2.1.2. Множества корректности. Итак, установлено, что при заданной величине v_∞ исходных ограничений на распределение $v(s)$ в постановке ОКЗА недостаточно для построения однолистного течения

вокруг профиля, ограниченного замкнутым контуром. Следовательно, решение ОКЗА, вообще говоря, не существует, т.е. нарушено одно из требований корректности по Адамару (см., например, [85]). Эта трудность была бы преодолена, если бы удалось все названные требования выразить в виде ограничений на $v(s)$. Таких результатов в настоящее время нет. Более того, известны функции $v(s)$, которым не может соответствовать физически реальный профиль (в частности, при $\varepsilon = 2$ это функции монотонные от точки разветвления до точки схода потока). Таким образом, допустимому классу искомых решений отвечает вполне определенное множество функций $v(s)$. В силу единственности интегрального представления решения основной ОКЗА этому множеству однозначно соответствует множество U допустимых функций $P(\gamma)$. Эти взаимосвязанные множества естественно назвать **множествами корректности ОКЗА**. Отметим, что использование множества U в качестве основного обладает тем преимуществом, что условия разрешимости (1.4.16) и (1.4.17) выражены в явном виде через функцию $P(\gamma)$. То же относится к достаточным условиям однолистности, приведенным в [6].

Итак, пусть множество корректности U состоит из управляющих функций $P(\gamma)$, определяющих решение задачи вида (1.4.9) в заданном

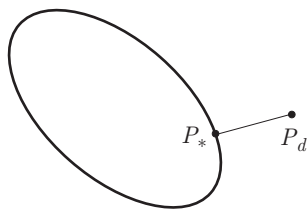


Рис. 2.1. К определению квазиразрешения

функций (2.1.2) и (2.1.3), построенные выше. Следовательно, для выделения «наилучшего» из обобщенных решений нужны дополнительные требования, в качестве которых можно использовать некоторые оптимизационные условия. Возьмем, например, модифицирующую функцию $T(\gamma)$ в виде

$$T(\gamma) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n D_k f_k(\gamma), & \gamma \in [\gamma_1, 2\pi], \\ 0, & \gamma \notin [\gamma_1, 2\pi], \end{cases}$$

где $\{f_k(\gamma)\}$, $k = \overline{1, n}$, — конечная система линейно независимых функций, $f_k(\gamma_1) = f_k(2\pi) = 0$, D_k — искомые параметры, $\gamma_1 > \pi + \beta$ — начало участка коррекции распределения скорости на нижней поверхности профиля. В частности, $f_k(\gamma) = \sin k\nu$, $\nu = \pi(\gamma - \gamma_1)/(2\pi - \gamma_1)$. Параметры D_k , $k = \overline{1, n}$, найдем из условия гладкой склейки функций $P(\gamma)$ и $P_*(\gamma)$ в точках $\gamma = \gamma_1$ и $\gamma = 2\pi - \beta$ и требования минимизации

функционала

$$J_0(D_k) = \frac{1}{2} \int_{\gamma_1}^{2\pi} \left[\sum_{k=1}^n D_k f_k(\gamma) \right]^2 d\gamma. \quad (2.1.4)$$

Отметим, что первое из названных условий примет вид

$$\sum_{k=1}^n D_k f'_k(\gamma_1) = \sum_{k=1}^n D_k f'_k(2\pi) = 0. \quad (2.1.5)$$

В итоге получили задачу минимизации функционала (2.1.4) при ограничениях (1.4.8), (1.4.16), (1.4.17) и (2.1.5).

2.1.3. Определение квазирешения. Выбор оптимизационного условия в ОКЗА естественно связать с требованием наименьшего искажения исходного распределения скорости при переходе к обобщенному решению. Поэтому наилучшей, будем считать такую функцию $P_*(\gamma)$, которая максимально близка в некотором смысле к функции $P_d(\gamma)$, определяемой начальными данными ОКЗА. Такой выбор $P_*(\gamma)$ соответствует идеологии метода квазирешений в теории некорректных задач, созданного В.К. Ивановым и его учениками [54]. Таким образом, отображение $z_{P_*}(\zeta)$, соответствующее функции $P_*(\gamma)$, естественно назвать квазирешением ОКЗА.

Приводимое ниже определение является одним из вариантов реализации определения квазирешения основной ОКЗА, содержащегося в монографиях [35, 109]. Представлена лишь схема нахождения квазирешений, без учета условий однолистности и полного доказательства соответствующих фактов. Все необходимые подробности читатель может найти в названных книгах.

Определение 2.1. *Квазирешением основной ОКЗА называется функция $z_{P_*}(\zeta)$, имеющая представление (1.4.9) и однозначно определяемая по функции $P_*(\gamma)$, принадлежащей множеству корректности U из нормированного пространства \mathbb{P} и минимизирующей на U заданный функционал $J(P)$, т. е.*

$$J(P_*) = \inf_{P \in U} J(P).$$

Теперь нужно обеспечить существование, единственность и устойчивость квазирешения, построив U специальным образом.

Пусть множество корректности U является непустым выпуклым компактным подмножеством множества $H(A, \alpha) \subset C^\alpha$ и состоит из функций $P(\gamma)$, удовлетворяющих условиям (1.4.8), (1.4.16), (1.4.17) и обеспечивающих однолистность области течения вокруг искомого профиля. Тогда следствием результатов [28] является следующее утверждение о корректности задачи построения квазирешения ОКЗА.

Теорема 2.1. *Пусть $\mathbb{P} = L_2[0, 2\pi]$,*

$$J(P) = J_0(P) \equiv \frac{1}{2} \|P - P_d\|_{L_2}^2$$

и $U \neq \emptyset$. Тогда квазирешение ОКЗА существует, единственно и устойчиво.

Остановимся на двух частных случаях, когда множество $U \subset H(A, \mu)$ определено только условиям (1.4.8), (1.4.16) и (1.4.17), т.е. обеспечивает выполнение условий разрешимости ОКЗА и не гарантирует, вообще говоря, однолиственность решения. В этих случаях квазирешение удастся построить в аналитическом виде.

2.1.4. Аналитическое представление квазирешений. Пусть $J(P) = J_0(P)$, а $P_*(\gamma) = P_d(\gamma) + T(\gamma)$, где $T(\gamma)$ — гёльдеровская 2π -периодическая функция. Условия разрешимости (1.4.8), (1.4.16) и (1.4.17) в выражении через $T(\gamma)$ примут вид

$$\int_0^{2\pi} T(\tau) d\tau = C_0, \quad \int_0^{2\pi} T(\tau) e^{i\tau} d\tau = C_1 + i C_2, \quad (2.1.6)$$

$$C_0 = B_0 - \int_0^{2\pi} P_d(\tau) d\tau, \quad C_1 + i C_2 = B_1 + i B_2 - \int_0^{2\pi} P_d(\tau) e^{i\tau} d\tau.$$

Следовательно, в этом случае для нахождения квазирешения нужно минимизировать квадратичный функционал

$$I(T) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} T^2(\tau) d\tau$$

при линейных ограничениях (2.1.6). Решим эту вариационную задачу методом множителей Лагранжа (см., например, [60]). Составим расширенный функционал

$$\begin{aligned} \Psi(T) = & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} T^2(\tau) d\tau + \mu_0 \left[\int_0^{2\pi} T(\tau) d\tau - C_0 \right] + \\ & + \mu_1 \left[\int_0^{2\pi} T(\tau) \cos \tau d\tau - C_1 \right] + \mu_2 \left[\int_0^{2\pi} T(\tau) \sin \tau d\tau - C_2 \right], \end{aligned}$$

где μ_0, μ_1, μ_2 — неопределенные множители. Записав необходимое условие экстремума, получим

$$\int_0^{2\pi} [T(\tau) + \mu_0 + \mu_1 \cos \tau + \mu_2 \sin \tau] g(\tau) d\tau = 0$$

для любой гёльдеровской 2π -периодической функции $g(\tau)$. По основной лемме вариационного исчисления экстремальной является функция

$$T(\gamma) = -\mu_0 - \mu_1 \cos \gamma - \mu_2 \sin \gamma. \quad (2.1.7)$$

Подставив выражение (2.1.7) в условия (2.1.6) и решив систему линейных уравнений относительно μ_1, μ_2, μ_3 , окончательно найдем

$$T(\gamma) = \pi^{-1} \left(\frac{C_0}{2} + C_1 \cos \gamma + C_2 \sin \gamma \right),$$

т. е. получим решение Манглера (см. (2.1.2)).

Пусть теперь $J(P) = J_1(P) \equiv (1/2)\|P' - P'_d\|_{L_2}^2 = \|T'\|_{L_2}^2$, $T(\gamma)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $T(0) = 0$. Тогда условия разрешимости примут вид

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} T'(\tau) e^{i\tau} d\tau &= C_2 - i C_1, & \int_0^{2\pi} \tau T'(\tau) d\tau &= -C_0, \\ \int_0^{2\pi} T'(\tau) d\tau &= 0, & T(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Функцию, минимизирующую функционал J_1 при ограничениях (2.1.8), как и выше, легко найти методом множителей Лагранжа. Имеем

$$T(\gamma) = -a_1 \cos \gamma + a_2 \sin \gamma + \frac{a_3 \gamma^2}{2} + a_4 \gamma + a_5, \quad (2.1.9)$$

где

$$a_1 = a_5 = \frac{3C_0 + \pi^2 C_1}{\pi(6 - \pi^2)}, \quad a_2 = \frac{C_2}{\pi}, \quad a_3 = -a_4 = \frac{3(C_0 + 2C_1)}{2\pi(6 - \pi^2)}.$$

В приведенных аналитических формулах для квазирешений исходная управляющая функция $P(\gamma)$ изменяется на всем интервале $[0, 2\pi]$. При этом новое распределение скорости $v_*(s)$ будет отличаться от исходного на всем контуре профиля. Однако такое изменение функции $v(s)$ не всегда допустимо. Например, если при задании распределения скорости предполагалось обеспечить безотрывность обтекания верхней поверхности профиля за счет специального вида функции $v(s)$ (см. гл. 6), то измененное распределение скорости может уже не удовлетворять этому требованию. Поэтому целесообразно получить формулы для квазирешений, когда интервал коррекции отличен от $[0, 2\pi]$.

Итак, предположим, что при отыскании квазирешения модифицирующая функция $T(\gamma) \equiv 0$ на интервалах $[0, \gamma_1]$ и $[\gamma_2, 2\pi]$, причем $0 \leq \gamma_1 < \gamma_2 \leq 2\pi$. Непрерывно продолжив гильбердовскую при $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]$ функцию $T(\gamma)$ нечетным образом на интервал $[2\gamma_1 - \gamma_2, \gamma_1]$, представим ее в виде равномерно сходящегося ряда Фурье

$$T(\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin \frac{\pi k(\gamma - \gamma_1)}{\gamma_2 - \gamma_1}. \quad (2.1.10)$$

При построении квазирешения минимизация функционала J_0 сводится к минимизации функционала $J = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2$ на множестве корректности и, в частности, при ограничениях (2.1.6), которые нетрудно

выразить через коэффициенты d_k . Таким образом, пришли к задаче нахождения набора коэффициентов $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$ из решения задачи минимизации функционала J на множестве (2.1.6) с дополнительными требованиями гёльдеровости функции $T(\gamma)$ и обращения ее в нуль в точках γ_1 и γ_2 . В общей ситуации для решения этой задачи необходимо построить минимизирующие последовательности, т.е. такие последовательности $\{P_k\}$, для которых $\lim_{k \rightarrow \infty} J(P_k) = J(P_*)$, причем функции P_k сходятся к P_* по норме пространства L_2 или другого соответствующего пространства. Способы построения минимизирующих последовательностей описаны в [35]. В частности, там приведены формулы для коэффициентов d_k , $k = \overline{1, n}$, отрезка ряда (2.1.10), сходящегося к искомой функции $T(\gamma)$ по норме пространства L_2 .

Если при построении квазирешения минимизировать функционал J_1 , то искомую функцию $T(\gamma)$ при $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]$, как и в случае интервала коррекции $[0, 2\pi]$, можно найти в виде (2.1.9). При этом коэффициенты a_k , $k = \overline{1, 5}$, должны удовлетворять условиям $T(\gamma_1) = 0$, $T(\gamma_2) = 0$ и условиям (2.1.8), где следует лишь сменить пределы интегрирования $0, 2\pi$ на γ_1, γ_2 .

Примеры построения квазирешений, получаемых в аналитическом виде, приведены в [35, 109]. Там же построен набор квазирешений, обладающих различными свойствами гладкости и характеризующихся одним параметром, который позволил выстроить эти квазирешения в шкалу. Даны примеры нахождения таких квазирешений для одного и того же исходного распределения скорости.

Таким образом, регуляризация решений ОКЗА равносильна классической вариационной задаче — минимизации заданного функционала при ограничениях, а применение вариационных методов позволяет описать соответствующие множества корректности.

2.2. Квазирешения с ограничением максимума скорости

2.2.1. Теорема существования и единственности. Определим в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ аффинное множество

$$K_0 = \left\{ P(\gamma) \in L_2[0, 2\pi] : \int_0^{2\pi} P(\gamma) d\gamma = 0, \int_0^{2\pi} P(\gamma) \cos \gamma d\gamma = B_1, \int_0^{2\pi} P(\gamma) \sin \gamma d\gamma = B_2 \right\}$$

и выпуклое замкнутое множество

$$K_1 = \{ P(\gamma) \in L_2[0, 2\pi] : P(\gamma) \leq H(\gamma) \text{ для почти всех (п. в.) } \gamma \in [0, 2\pi] \};$$

вид функции $H(\gamma)$ определен в (1.4.19). Если снова определить квазирешение ОКЗА как решение задачи на минимум функционала $J_0(P)$

на множестве K_0 , то, очевидно, свойства выпуклости, замкнутости и непустоты множества K_0 и строгой выпуклости и непрерывности функционала $J_0(P)$, как и выше, обеспечат существование единственного решения этой задачи. Вместе с тем набор ограничений (1.4.8), (1.4.16), (1.4.17) — минимально возможный. Учтем дополнительно ограничение (1.4.19), имеющее физический смысл, указанный в п. 1.4.1. Построение квазирешения в этом случае сводится к задаче найти функцию $P_* \in K = K_0 \cap K_1$, доставляющую минимум функционалу

$$J_0(P) = \frac{1}{2} \|P - P_d\|_{L_2}^2 \rightarrow \min. \quad (2.2.1)$$

Ясно, что K — выпуклое замкнутое множество, однако оно непустое не при всех значениях входных параметров v_{\max} , B_1 , B_2 и β .

Лемма 2.1. *Существует такое $v^* \geq 1$, что $K \neq \emptyset$ при $v_{\max} > v^*$ и $K = \emptyset$ при $v_{\max} < v^*$.*

Если $v_{\max} > v^* + \delta$, $\delta > 0$, то найдутся постоянная $\eta = \eta(\delta) > 0$ и функция $P_\delta \in K_0$: $P_\delta(\gamma) \leq H(\gamma) - \eta$ при почти всех $\gamma \in [0, 2\pi]$.

Доказательство. Представим функцию $H(\gamma)$ в виде

$$H(\gamma) = H(\gamma, v_{\max}) = \ln v_{\max} + \tilde{H}(\gamma),$$

$$\tilde{H}(\gamma) = -\ln |2(\sin \gamma + \sin \beta)| + (\varepsilon - 1) \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|.$$

Непосредственными вычислениями можно установить, что

$$\int_0^{2\pi} \tilde{H}(\gamma) d\gamma = 0, \quad \int_0^{2\pi} \tilde{H}(\gamma) \cos \gamma d\gamma = -\pi(\varepsilon - 1) \cos \beta,$$

$$\int_0^{2\pi} \tilde{H}(\gamma) \sin \gamma d\gamma = \pi(\varepsilon - 3) \sin \beta. \quad (2.2.2)$$

Кроме того, $\tilde{H}(\gamma) \geq c = \text{const}$ при всех $\gamma \in [0, 2\pi]$ (напомним, что $1 \leq \varepsilon \leq 2$). Функция $\tilde{P}(\gamma) = \pi^{-1} B_1 \cos \gamma + \pi^{-1} B_2 \sin \gamma$ принадлежит K_0 и ограничена. Отсюда следует, что при достаточно больших v_{\max} будет выполнено неравенство $\tilde{P}(\gamma) \leq H(\gamma)$, так что $\tilde{P} \in K$. Из построений также очевидно, что если множество $K \neq \emptyset$ при некотором v_{\max} , то оно непустое и при большем значении v_{\max} . С другой стороны, условия

$$\int_0^{2\pi} P(\gamma) d\gamma = 0, \quad P \in K_1,$$

приводят к необходимому условию непустоты K :

$$\int_0^{2\pi} H(\gamma) d\gamma \geq 0. \quad (2.2.3)$$

В силу (2.2.2) имеем $\int_0^{2\pi} H(\gamma) d\gamma = 2\pi \ln v_{\max}$, и при $0 < v_{\max} < 1$ получим $\int_0^{2\pi} H(\gamma) d\gamma < 0$, что противоречит (2.2.3). Таким образом,

найдется такое $v^* \geq 1$, для которого $K = \emptyset$ при $v_{\max} < v^*$ и $K \neq \emptyset$ при $v_{\max} > v^*$.

Пусть теперь $v_{\max} > v^* + \delta$, $\delta > 0$. Тогда существует такой элемент $P_\delta \in K_0$, что $P_\delta(\gamma) \leq H(\gamma, v_{\max} - \delta) = H(\gamma, v_{\max}) - (\ln v_{\max} - \ln |v_{\max} - \delta|)$, и последнее утверждение леммы справедливо при $\eta = \ln v_{\max} - \ln |v_{\max} - \delta|$. Лемма доказана.

Пусть $L_2[0, 2\pi] = V_0 + V_1$ — ортогональное разложение пространства, такое, что для $u \in L_2[0, 2\pi]$ справедливо представление

$$u = u_0 + u_1, \quad (u_0, u_1) = \int_0^{2\pi} u_0(\gamma) u_1(\gamma) d\gamma = 0$$

и

$$u_0(\gamma) = u^0 + u^1 \cos \gamma + u^2 \sin \gamma \in V_0$$

с коэффициентами Фурье u^0, u^1, u^2 . Любую функцию $P \in K_0$ можно представить в виде $P(\gamma) = \tilde{P}(\gamma) + P_1(\gamma)$, где

$$\tilde{P}(\gamma) = \pi^{-1} B_1 \cos \gamma + \pi^{-1} B_2 \sin \gamma \in V_0, \quad P_1(\gamma) \in V_1.$$

Ясно, что $K = K_0 \cap K_1 = V_0 \cap K_{11}$, где

$$K_{11} = \{P(\gamma) \in L_2[0, 2\pi] : P(\gamma) \leq H(\gamma) - \tilde{P}(\gamma) \text{ для п. в. } \gamma \in [0, 2\pi]\}.$$

Используя новое представление множества K и лемму 2.1, нетрудно провести анализ чувствительности K к изменению параметров B_1, B_2 и v_{\max} . Например, если

$$\pi^{-1} |B_1 - \widetilde{B}_1| + \pi^{-1} |B_2 - \widetilde{B}_2| \leq \delta,$$

то для множества

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{11} = \{P(\gamma) \in L_2[0, 2\pi] : \\ P(\gamma) \leq H(\gamma) - \pi^{-1} \widetilde{B}_1 \cos \gamma - \pi^{-1} \widetilde{B}_2 \sin \gamma \quad \forall \gamma \in [0, 2\pi]\} \end{aligned}$$

справедливы включения $K_{11}^\delta \subset \tilde{K}_{11} \subset K_{11}^{-\delta}$, где

$$K_{11}^{\pm\delta} = \{P(\gamma) \in L_2[0, 2\pi] : P(\gamma) \leq H(\gamma) - \tilde{P}(\gamma) \pm \delta \quad \forall \gamma \in [0, 2\pi]\}.$$

Отсюда, в частности, следует, что если $v_{\max} > v^* \exp \delta$, то $V_0 \cap \tilde{K}_{11} \neq \emptyset$.

Из леммы 2.1 и свойств функционала $J_0(P)$ вытекает следующая теорема существования и единственности квазирешения.

Теорема 2.2. При $v_{\max} > v^*$ задача (2.2.1) имеет единственное решение, а при $v_{\max} < v^*$ она неразрешима.

Доказательство. Поскольку функционал $J_0(P)$ строго выпуклый, непрерывный и коэрцитивный, а множество K выпуклое и замкнутое, однозначная разрешимость задачи (2.2.1) определяется непустотой множества K . Теперь доказываемое утверждение непосредственно следует из леммы 2.1.

Полученный в теореме 2.2 результат легко переносится на задачи минимизации других выпуклых функционалов на множестве K . Одним из них является функционал вида (1.4.13). Эти результаты изложены в гл. 4.

2.2.2. Конечномерная аппроксимация. Пусть V_h — конечномерная аппроксимация пространства $L_2[0, 2\pi]$, $h > 0$ — параметр. В качестве такой аппроксимации далее выберем пространство кусочно-постоянных функций на равномерной сетке шага $h = 2\pi/N$ ($N > 3$) на отрезке $[0, 2\pi]$. Определим множество $K_{0,h} = K_0 \cap V_h$ и множество

$$K_{1,h} = \{P_h \in V_h : P_h(\gamma) \leq H_h(\gamma) \quad \forall \gamma \in [0, 2\pi]\}.$$

Здесь H_h — кусочно-постоянная функция, равная

$$H_i = \frac{1}{h} \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} H(\gamma) d\gamma$$

на промежутке (γ_{i-1}, γ_i) . Ясно, что при таком определении H_h множество

$$K_{1,h} = \{P_h \in V_h : P_i \leq H_i \text{ для всех } i = 1, \dots, N\},$$

где P_i — значение P_h на промежутке (γ_{i-1}, γ_i) . В то же время в терминах ограничений на вектор $P = (P_1, \dots, P_N)^T$ множество $K_{0,h}$ примет вид $K_{0,h} = \{P : BP = b\}$ с вектором $b = (0, B_1, B_2)^T$ и $3 \times N$ -матрицей B ранга 3, элементы которой определены равенствами

$$b_{1j} = h, \quad b_{2j} = \int_{\gamma_{j-1}}^{\gamma_j} \cos \gamma d\gamma, \quad b_{3j} = \int_{\gamma_{j-1}}^{\gamma_j} \sin \gamma d\gamma.$$

Для векторов узловых параметров функций P_h, Q_h обозначим $\langle P, Q \rangle = \sum_{i=1}^N P_i Q_i$ скалярное произведение в пространстве \mathbb{R}^N и $|P| = \langle P, P \rangle^{1/2}$ — норму.

Для множества $K_h = K_{0,h} \cap K_{1,h}$ справедлива следующая лемма.

Лемма 2.2. *Существует такое $v_h^* \geq 1$, что при $v_{\max} > v_h^*$ множество K_h не пусто и при $v_{\max} < v_h^*$ множество K_h пусто.*

Если $v_{\max} > v_h^* + \delta$, $\delta > 0$, то найдутся такие постоянная $\eta = \eta(\delta) > 0$ и функция $P_\delta \in K_{0,h}$, что $P_\delta(\gamma) \leq H_h(\gamma) - \eta$ при $\gamma \in [0, 2\pi]$.

Доказательство. Представим функцию $H_h(\gamma)$ в виде $H_h(\gamma) = \ln v_{\max} + \widetilde{H}_h(\gamma)$. Ясно, что $\widetilde{H}_h(\gamma) \geq c = \text{const}$ при всех $\gamma \in [0, 2\pi]$. Из построения функции H_h следует также, что

$$\int_0^{2\pi} \widetilde{H}_h(\gamma) d\gamma = \int_0^{2\pi} \widetilde{H}(\gamma) d\gamma = 0.$$

Выберем произвольную функцию $P_h \in K_{0,h}$. Тогда при достаточно больших v_{\max} будет выполнено неравенство $P_h(\gamma) \leq H_h(\gamma)$, так что $P_h \in K_h$. С другой стороны, необходимое условие непустоты K_h

$$\int_0^{2\pi} H_h(\gamma) d\gamma \geq \int_0^{2\pi} P_h(\gamma) d\gamma = 0$$

приводит к ограничению $v_h^* \geq 1$. Дальнейшее доказательство почти дословно совпадает с доказательством леммы 2.1.

Замечание 2.1. Последнее утверждение леммы 2.2 означает, что при $v_{\max} > v_h^*$ выполняется условие Слейтера.

Рассмотрим конечномерную аппроксимацию задачи (2.2.1):

$$P_h = \operatorname{argmin}_{Q_h \in K_h} \{J_h(Q) = \frac{1}{2} \|Q_h - P_{d,h}\|^2\}, \quad (2.2.4)$$

где $P_{d,h}$ — V_h -аппроксимация P_d . Задача (2.2.4) — задача квадратичного программирования. Отсюда и из леммы 2.2 следует теорема 2.3.

Теорема 2.3. При $v_{\max} > v_h^*$ задача (2.2.4) имеет единственное решение, а при $v_{\max} < v_h^*$ она неразрешима.

Поскольку функция $|P - P_d|^2/2$ выпукла и непрерывно дифференцируема по P , а все ограничения линейны, из известных результатов [14] следует теорема 2.4.

Теорема 2.4. Пусть P — решение задачи (2.2.4). Тогда существует вектор $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^3$, такой, что

$$\begin{cases} P - P_d + \lambda - B^T \mu = 0, \\ BP - b = 0, \\ P - H \ll 0, \langle P - H, \lambda \rangle = 0, \end{cases} \quad (2.2.5)$$

где неравенство $P - H \ll 0$ означает $P_i - H_i \leq 0 \forall i$.

Обратно, если вектор $(P, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^3$ удовлетворяет соотношениям (2.2.5), то P — решение задачи (2.2.4).

Таким образом, решение конечномерной задачи о квазиразрешениях сведено к решению задачи (2.2.4).

2.3. Исторические замечания и библиографические ссылки

2.3.1. Удовлетворение условиям разрешимости ОКЗА. Способ (2.1.2) удовлетворения условиям разрешимости ОКЗА предложен Манглером [123]. Аналогичный подход использовал Арлинггер [98], допуская изменение исходного распределения скорости не на всем контуре, а только на части его нижней поверхности. Отметим, что в обеих работах [98, 123] авторы не требовали минимизации изменений, вносимых в начальное распределение $v(s)$, однако в случае, который

изучил Манглер [123] (скорость варьируется на всем контуре и ее значение в задней кромке не фиксировано), построенное решение, как показано в [35], является в определенном смысле оптимальным.

По-видимому, впервые оптимизационное условие при модификации исходного распределения скорости в ОКЗА ввел Стрэнд [130]. Развив результаты [98], он разработал и численно реализовал способ удовлетворения условий (1.4.16), (1.4.17) за счет варьирования конечного числа параметров, введенных в выражение скорости для того, чтобы меньше отклониться от исходных данных ОКЗА. В работе [130] эта же задача решена численно с использованием метода множителей Лагранжа. Вопросы существования, единственности и устойчивости решения в ней не рассмотрены. Тот же подход применен в [131] для удовлетворения условиям разрешимости в основной ОКЗА в рамках модели газа Чаплыгина.

2.3.2. Теория квазирешений ОКЗА. Под квазирешениями некорректной задачи В. К. Иванов [54] предложил понимать всякие элементы множества U допустимых решений (множества корректности), реализующие расстояние от элемента, характеризующего решение и определенного по начальным данным задачи, до множества U .

Вопрос о нахождении квазирешений ОКЗ поставили Л. А. Аксентьев и Л. Н. Журбенко [11].

Впервые определение квазирешения внешней ОКЗ, реализующее подход В. К. Иванова, дано в работе [28].

Теория квазирешений ОКЗА подробно изложена в монографиях [35, 109]. Там же доказаны теоремы о существовании, единственности и устойчивости квазирешений.

Квазирешения, учитывающие ограничение на максимум скорости, исследованы в недавних работах [37, 38, 43].

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧЕ О КВАЗИРЕШЕНИЯХ. ПРИМЕРЫ КВАЗИРЕШЕНИЙ

3.1. Функции Лагранжа и двойственные задачи

Рассмотрим функцию Лагранжа

$$L(P, \lambda) = J_0(P) + \int_0^{2\pi} \lambda(\gamma)[P(\gamma) - H(\gamma)] d\gamma \quad (3.1.1)$$

и будем искать ее седловую точку $(P, \lambda) \in K_0 \times L_2^+[0, 2\pi]$:

$$L(P, \eta) \leq L(P, \lambda) \leq L(Q, \lambda) \quad \forall Q \in K_0 \quad \forall \eta \in L_2^+[0, 2\pi]. \quad (3.1.2)$$

Здесь $L_2^+[0, 2\pi]$ — конус неотрицательных функций из $L_2[0, 2\pi]$.

Теорема 3.1. Пусть выполнено условие $v_{\max} > v^*$, где v^* определено в лемме 2.1. Тогда $P \in K_0$ является решением задачи (2.2.1) в том и только том случае, когда существует функция $\lambda \in L_2^+[0, 2\pi]$, такая, что (P, λ) есть седловая точка функции $L(P, \lambda)$, т. е. выполнено соотношение (3.1.2).

Доказательство. Используем общую теорию существования седловой точки функции Лагранжа (см. [95, гл. 3]). Нетрудно видеть, что функция (3.1.1) выпукла и непрерывна по P и аффинна по λ . Кроме того,

$$L(P, 0) = J_0(P) \rightarrow +\infty$$

при $\|P\| = \|P\|_{L_2} \rightarrow \infty$. Остается установить, что

$$\liminf_{P \in K_0} L(P, \lambda) = -\infty \quad \text{при} \quad \|\lambda\| \rightarrow \infty, \quad \lambda \in L_2^+[0, 2\pi].$$

Для любой функции $P \in K_0$ справедливо представление

$$P = \tilde{P} + P_1, \quad P_1 \in V_1, \quad \tilde{P}(\gamma) = \pi^{-1} B_1 \cos \gamma + \pi^{-1} B_2 \sin \gamma,$$

где $L_2[0, 2\pi] = V_0 + V_1$ — ортогональное разложение $L_2[0, 2\pi]$ (см.

п. 2.2.1). Отсюда следует

$$\begin{aligned} \inf_{P \in K_0} L(P, \lambda) &= \inf_{P_1 \in V_1} L(\tilde{P} + P_1, \lambda) = \frac{1}{2} \|\tilde{P} - P_{d,0}\|^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \|P_1 - P_{d,1}\|^2 + (\lambda_0, \tilde{P} - H_0) + (\lambda_1, P_1 - H_1). \end{aligned}$$

Прямыми вычислениями найдем $P_1 = -\lambda_1 + P_{d,1}$, где $P_{d,1}$ — ортогональная проекция P_d на подпространство V_1 . Таким образом, функция

$$P(\lambda) = \arg \min_{P \in K_0} L(P, \lambda) \quad (3.1.3)$$

определена равенством $P(\lambda) = \tilde{P} - \lambda_1 + P_{d,1}$ и

$$L(P(\lambda), \lambda) = -\frac{1}{2} \|\lambda_1\|^2 + (\lambda_1, P_{d,1} - H_1) + (\lambda_0, \tilde{P} - H_0) + \\ + \frac{1}{2} \|\tilde{P} - P_{d,0}\|^2.$$

Пусть функция $P_\delta(\gamma) \in K_0$ такова, что (см. лемму 2.1)

$$P_\delta(\gamma) < H(\gamma) - \eta, \quad \eta > 0,$$

при почти всех $\gamma \in [0, 2\pi]$. Тогда

$$L(P(\lambda), \lambda) = -\frac{1}{2} \|\lambda_1\|^2 + (\lambda_1, P_{d,1} - H_1) + (\lambda_0, P_\delta - H) + \\ + \frac{1}{2} \|\tilde{P} - P_{d,0}\|^2 = -\frac{1}{2} \|\lambda_1\|^2 + (\lambda_1, P_d - P_\delta) + (\lambda, P_\delta - H) + \\ + \frac{1}{2} \|\tilde{P} - P_{d,0}\|_{L_2}^2 \leq -\alpha \|\lambda_1\|^2 + c \|P_d - P_\delta\|_{L_2}^2 + \\ + \frac{1}{2} \|\tilde{P} - P_{d,0}\|^2 - \eta \int_0^{2\pi} \lambda(\gamma) d\gamma = -\alpha \|\lambda_1\|^2 - \eta \int_0^{2\pi} \lambda(\gamma) d\gamma + c \leq \\ \leq -\min\{\alpha, \eta\} \left(\|\lambda_1\|^2 + \int_0^{2\pi} \lambda(\gamma) d\gamma \right) + c \quad (3.1.4)$$

с положительными постоянными α, η, c , не зависящими от λ .

Предположим теперь, что $\{\lambda^{(n)}\} \in L_2^+[0, 2\pi]$ и $\|\lambda^{(n)}\| \rightarrow \infty$. Докажем, что

$$\|\lambda_1^{(n)}\|^2 + \int_0^{2\pi} \lambda^{(n)}(\gamma) d\gamma \rightarrow +\infty.$$

Допустим противное, т.е. существование подпоследовательности (сохраним за ней обозначение $\{\lambda^{(n)}\}$), такой, что

$$\|\lambda_1^{(n)}\|^2 + \int_0^{2\pi} \lambda^{(n)}(\gamma) d\gamma \leq c \quad \forall n. \quad (3.1.5)$$

Это, в частности, означает равномерную по n ограниченность первых коэффициентов Фурье функций $\lambda^{(n)}$. Но

$$\left| \int_0^{2\pi} \lambda(\gamma) \cos \gamma d\gamma \right| \leq \int_0^{2\pi} \lambda(\gamma) d\gamma, \quad \left| \int_0^{2\pi} \lambda(\gamma) \sin \gamma d\gamma \right| \leq \int_0^{2\pi} \lambda(\gamma) d\gamma$$

для $\lambda(\gamma) \geq 0$, поэтому второй и третий коэффициенты Фурье функций $\lambda^{(n)}$ также ограничены. Отсюда следует $\|\lambda_0^{(n)}\| \leq c \quad \forall n$, что вместе с (3.1.5) приводит к неравенству $\|\lambda^{(n)}\| \leq c$, противоречащему условию. Итак, при $\|\lambda^{(n)}\| \rightarrow \infty$ имеем

$$\|\lambda_1^{(n)}\|^2 + \int_0^{2\pi} \lambda^{(n)}(\gamma) d\gamma \rightarrow +\infty,$$

и в силу (3.1.4) $L(P(\lambda^{(n)}), \lambda^{(n)}) \rightarrow -\infty$. Теорема доказана.

Двойственной к (2.2.1) является задача

$$\lambda = \operatorname{argmax}_{\lambda \in L_2^+} \psi(\lambda),$$

где $\psi(\lambda) = L(P(\lambda), \lambda)$ и $P(\lambda)$ — решение задачи (3.1.3). Как установлено при доказательстве теоремы 3.1,

$$L(P(\lambda), \lambda) = -\frac{1}{2} \|\lambda_1\|^2 + (\lambda_1, P_{d,1} - H_1) + \\ + (\lambda_0, \tilde{P} - H_0) + \frac{1}{2} \|\tilde{P} - P_{d,0}\|^2.$$

Проведя несложные преобразования, получим следующий вид двойственной функции:

$$\psi(\lambda) = -\frac{1}{2} \|\lambda_1\|^2 + (\lambda, P_{d,1} + \tilde{P} - H) + \frac{1}{2} \|\tilde{P} - P_{d,0}\|^2. \quad (3.1.6)$$

Построим теперь функцию Лагранжа для конечномерной задачи (2.2.4)

$$L_h(P_h, \lambda_h) = J_h(H_h) + \int_0^{2\pi} \lambda_h(\gamma) [P_h(\gamma) - H_h(\gamma)] d\gamma$$

и будем искать ее седловую точку $(P_h, \lambda_h) \in K_{0,h} \times V_h^+$, где V_h^+ — конус неотрицательных функций из V_h .

Теорема 3.2. Пусть выполнено условие $v_{\max} > v_h^*$, где v_h^* определено в лемме 2.2. Тогда $P_h \in K_{0,h}$ является решением задачи (2.2.4) в том и только том случае, когда существует функция $\lambda_h \in V_h^+$, такая, что (P_h, λ_h) есть седловая точка L_h .

Доказательство. Ясно, что функция Лагранжа $L_h(P, \lambda)$ выпукла и непрерывна по P_h и аффинна по λ_h , а также

$$L_h(P_h, 0) = J_{0h}(P_h) \rightarrow +\infty$$

при $\|P_h\| \rightarrow \infty$. Кроме того, выполнено условие Слейтера (см. замечание 2.1). Из [95] (предложение 5.1 гл. III) следует доказываемый результат.

Пусть

$$P_h(\lambda_h) = \underset{P_h \in K_{0,h}}{\operatorname{argmin}} L_h(P_h, \lambda_h)$$

для произвольной функции $\lambda_h \in V_h$. Тогда вектор $P(\lambda)$ узловых параметров функции $P_h(\lambda_h)$ является решением задачи

$$P(\lambda) = \underset{BP=b}{\operatorname{argmin}} \left[\frac{|P - P_d|^2}{2} + \langle \lambda, P - H \rangle \right]. \quad (3.1.7)$$

Решение задачи (3.1.7) можно записать в явном виде. Именно, пусть

$$S = E - B^T(BB^T)^{-1}B,$$

где E — единичная $N \times N$ матрица, матрица B определена в п. 2.2.2,

$$b' = B^T(BB^T)^{-1}b \in \mathbb{R}^N.$$

Тогда

$$P(\lambda) = b' + SP_d - S\lambda. \quad (3.1.8)$$

Матрица $S = S^T$ является проектором на ядро $\operatorname{Ker} B$. Определим двойственную функцию

$$\Psi(\lambda) = \frac{|P(\lambda) - P_d|^2}{2} + \langle \lambda, P(\lambda) - H \rangle. \quad (3.1.9)$$

Подставив выражение для $P(\lambda)$ из (3.1.8) в равенство (3.1.9) и проведя несложные выкладки, получим

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda) = & -\frac{|S\lambda|^2}{2} + \langle \lambda, (E - S)b' + SP_d - H \rangle + \\ & + \frac{|b' + (S - E)P_d|^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Теорема доказана.

Замечание 3.1. Наряду с рассмотренными функциями Лагранжа L и L_h , в которых с помощью множителей Лагранжа снимаются ограничения-неравенства, можно построить функцию Лагранжа, снимая, например, все ограничения. Такая функция для задачи (2.2.4), записанная для векторов узловых параметров функций из V_h , имеет вид

$$\mathcal{L}(P, \lambda, \mu) = \frac{|P - P_d|^2}{2} + \langle \lambda, P - H \rangle - \sum_{i=1}^3 \mu_i (BP - b)_i.$$

Замечание 3.2. Задачи с так называемыми седловыми операторами, в частности с оператором (2.2.5), могут быть использованы для построения итерационных алгоритмов. Ограничимся исследованием итерационных алгоритмов, построенных по функциям Лагранжа L и L_h .

3.2. Итерационные алгоритмы

Используя изложенные результаты, можно предложить различные итерационные методы решения задачи (2.2.1) и ее конечномерной аппроксимации, основанные как на прямых, так и на двойственных постановках. Ниже рассмотрено несколько таких методов, обоснована их сходимость и обсуждены вопросы реализации.

Алгоритм Удзавы отыскания седловой точки функции Лагранжа (3.1.1) имеет вид

$$\begin{cases} \lambda^0 \in L_2^+[0, 2\pi]; & \lambda^{n+1} = \text{Pr}_{L_2^+} \{ \lambda^n + \rho_n (P^n - H) \}, \\ P^n = \underset{P \in K_0}{\operatorname{argmin}} L(P, \lambda^n). \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Здесь $\text{Pr}_{L_2^+}$ — проекция в $L_2[0, 2\pi]$ на $L_2^+[0, 2\pi]$, $\rho_n > 0$ — итерационный параметр.

При выполнении условия $v_{\max} > v^*$, т.е. при существовании седловой точки функции Лагранжа, итерационный алгоритм (3.2.1) сходится, начиная с любого начального приближения, если

$$\rho_n \in [\nu, 2 - \nu] \quad \forall \nu > 0: \quad \|P^n - P\|_{L_2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство следует из [20] (теорема 4.1 гл. 2).

Легко видеть, что λ^{n+1} определяется прямыми вычислениями:

$$\lambda^{n+1}(\gamma) = (\lambda^n + \rho_n (P^n - H))^+(\gamma) \quad \text{для почти всех } \gamma.$$

Также нетрудно получить формулы для вычисления $P^n(\gamma)$.

Действительно, как следует из доказательства теоремы 3.2,

$$P^n = \tilde{P} + (P_d - \lambda^n)_1 = \tilde{P} + P_d - \lambda^n - (P_d - \lambda^n)_0,$$

а $(P_d - \lambda^n)_0$ — первые три члена разложения в ряд Фурье функции $P_d - \lambda^n$.

Отметим, что при фактической реализации алгоритма (3.2.1) приходится использовать приближенные вычисления, в частности, квадратные формулы при вычислении интегралов, и аппроксимировать функции P и λ некоторыми их конечномерными приближениями. В итоге получим алгоритм Удзавы с неточной реализацией итерационных шагов, который требует дополнительного обоснования. Этого недостатка лишен алгоритм Удзавы для конечномерной задачи (2.2.4), каждый шаг которого может быть реализован точно.

Алгоритм Удзавы для задачи (2.2.4) имеет вид

$$\begin{cases} \lambda_h^0 \in V_h^+; & \lambda_h^{n+1} = \text{Pr}_{V_h^+} \{ \lambda_h^n + \rho_n (P_h^n - H_h) \}, \\ P_h^n = \underset{P_h \in K_{0,h}}{\operatorname{argmin}} L(P_h, \lambda_h^n). \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Итерационный алгоритм (3.2.2) сходится, начиная с любого начального приближения, если $\rho_n \in [\nu, 2 - \nu] \quad \forall \nu > 0$. Реализация одного шага метода (3.2.2) состоит в вычислении вектора узловых параметров λ^{n+1} по формуле

$$\lambda_i^{n+1} = (\lambda_i^n + \rho_n (P_i^n - H_i))^+ \quad \text{для всех } i = 1, \dots, N \quad (3.2.3)$$

и в вычислении вектора P^n , для чего требуется решить задачу квадратичного программирования

$$\frac{1}{2} \min_{B P = P} |P - P_d|^2 + \langle \lambda^n, P - H \rangle.$$

Как уже было отмечено ранее (см. (3.1.8)), решение этой задачи можно выписать в явном виде:

$$P^n = B^T b' + S(P_d - \lambda^n).$$

«Прямое» решение двойственных задач. В силу дифференцируемости функции ψ задача (3.1.6) эквивалентна вариационному неравенству

$$(\lambda_1 + (P_{d,1} + \tilde{P} - H), \mu - \lambda) \geq 0 \quad \forall \mu \in L_2^+[0, 2\pi],$$

или, в свою очередь, уравнению

$$\lambda = \text{Pr}_{L_2^+}(\lambda_0 + P_{d,1} + \tilde{P} - H). \quad (3.2.4)$$

Уравнение (3.2.4) можно записать в поточечном виде:

$$\lambda(\gamma) = (\lambda_0 + P_{d,1} + \tilde{P} - H)^+ \quad \text{для почти всех } \gamma \in [0, 2\pi],$$

откуда, в частности, следует, что, найдя компоненту λ_0 множителя Лагранжа λ , можно построить λ и затем решение задачи (2.2.1):

$$P^*(\gamma) = (\tilde{P} - (\lambda - \lambda_0) + P_{d,1})(\gamma) \quad \text{для почти всех } \gamma \in [0, 2\pi].$$

Для отыскания λ_0 преобразуем уравнение (3.2.4), применив к обеим его частям оператор Pr_{V_0} ортогонального в L_2 проектирования на подпространство V_0 . Будем иметь

$$\lambda_0 = \text{Pr}_{V_0} \text{Pr}_{L_2^+}(\lambda_0 + P_{d,1} + \tilde{P} - H). \quad (3.2.5)$$

Ясно, что (3.2.5) — это система нелинейных уравнений относительно трех первых коэффициентов Фурье-разложения функции λ , которую нетрудно записать в явном виде для численного решения. С другой стороны, это уравнение с нестягивающим оператором $F = \text{Pr}_{V_0} \circ \text{Pr}_{L_2^+}$ в V_0 . Уравнение (3.2.5) имеет хотя бы одно решение (ортогональная проекция на V_0 второй компоненты λ седловой точки функции Лагранжа).

Докажем, что оператор F обладает свойством обратной сильной монотонности:

$$\|F\lambda_0 - F\mu_0\| \leq (F\lambda_0 - F\mu_0, \lambda_0 - \mu_0) \quad \forall \lambda_0, \mu_0 \in V_0.$$

Для этого воспользуемся тем, что Pr_{V_0} — линейный ортогональный проектор, а оператор $\text{Pr}_{L_2^+}$ обладает свойством обратной сильной монотонности как проектор на выпуклое замкнутое множество. Получим

$$\begin{aligned} \|F\lambda_0 - F\mu_0\| &\leq \| \text{Pr}_{L_2^+} \lambda_0 - \text{Pr}_{L_2^+} \mu_0 \| \leq (\text{Pr}_{L_2^+} \lambda_0 - \text{Pr}_{L_2^+} \mu_0, \lambda_0 - \mu_0) = \\ &= (\text{Pr}_{L_2^+} \lambda_0 - \text{Pr}_{L_2^+} \mu_0, \text{Pr}_{V_0}(\lambda_0 - \mu_0)) = \\ &= (\text{Pr}_{V_0} \text{Pr}_{L_2^+} \lambda_0 - \text{Pr}_{V_0} \text{Pr}_{L_2^+} \mu_0, \lambda_0 - \mu_0) = (F\lambda_0 - F\mu_0, \lambda_0 - \mu_0). \end{aligned}$$

Поскольку оператор F — обратно сильно монотонный и уравнение (3.2.5) имеет хотя бы одно решения, итерации

$$\lambda_0^{n+1} = (1 - \omega)\lambda_0^n + \omega \text{Pr}_{V_0} \text{Pr}_{L_2^+} (\lambda_0^n + P_{d,1} + \tilde{P} - H), \quad \omega \in (0, 2),$$

сходятся [111], начиная с любого начального приближения, к какому-либо решению уравнения (3.2.5).

Подобный предыдущему алгоритм можно применить и для решения конечномерной двойственной задачи

$$\lambda = \underset{\mu \gg 0}{\operatorname{argmax}} \Psi(\mu), \quad (3.2.6)$$

где функция $\Psi(\mu)$ задана равенством (3.1.10), а неравенство $\mu \gg 0$ означает $\mu_i \geq 0 \forall i$.

Действительно, используя свойство дифференцируемости Ψ , из (3.2.6) получим

$$(S\lambda, \mu - \lambda) \geq ((E - S)b' - SP_d + H, \mu - \lambda) \quad \forall \mu \gg 0,$$

откуда

$$\lambda = ((E - S)b' - SP_d + H + (E - S)\lambda)^+. \quad (3.2.7)$$

Умножив обе части уравнения (3.2.7) на матрицу $E - S$ — проектор на $\operatorname{Im} B^T$, получим уравнение для вектора $y = (E - S)\lambda \in \mathbb{R}^3$ — аналог (3.2.5)

$$y = (E - S)((E - S)b' - SP_d + H + y)^+.$$

Аналогично предыдущему случаю можно доказать сходимость итерационного алгоритма

$$\begin{aligned} y^{n+1} &= (1 - \omega)y^n + \\ &+ \omega(E - S)((E - S)b' - SP_d + H + y^n)^+, \quad \omega \in (0, 2). \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Ясно, что по найденному $y = (E - S)\lambda \in \mathbb{R}^3$ вектор λ восстанавливается по формуле (3.2.7), после чего решение задачи (2.2.4) определяется по формуле $P = b' + SP_d - S\lambda$ (см. (3.1.8)).

Замечание 3.3. Уравнение (3.2.7), а, значит, и итерационный алгоритм (3.2.8) можно построить, исходя из седловой задачи (2.2.5).

Метод расщепления для прямой задачи (2.2.4). Запишем задачу (2.2.4) в виде уравнения (включения) с многозначным максимально монотонным оператором:

$$TP_h \equiv P_h - P_d + \partial I_{K_h}(P_h) \ni 0, \quad (3.2.9)$$

где ∂I_{K_h} — субдифференциал индикаторной функции множества K_h , т. е.

$$I_{K_h}(P) = \{0 \text{ при } P \in K_h, +\infty \text{ при } P \notin K_h\}.$$

Пусть, кроме того, $\partial I_{K_{0,h}}, \partial I_{K_{1,h}}$ — субдифференциалы индикаторных функций множеств $K_{0,h}$ и $K_{1,h}$ соответственно,

$$SP_h = P_h - P_{d,h} + \partial I_{K_{0,h}}(P_h), \quad R = \partial I_{K_{1,h}}.$$

Известно, что области определений $D(S) = K_{0,h}$ и $D(R) = K_{1,h}$. Согласно лемме 2.2 при $v_{\max} > v_h^*$ не пусто множество

$$\text{int} K_{1,h} \cap K_{0,h} = \text{int} D(S) \cap D(R),$$

откуда следует [99], что $T = R + S$ (здесь int — обозначение внутреннейности соответствующего множества). Это позволяет применить к решению уравнения (3.2.9) методы расщепления [121].

Пусть I — тождественное отображение в пространстве V_h ,

$$J_R^r = (I + rR)^{-1}, \quad r = \text{const} > 0,$$

— резольвента максимально монотонного оператора R , однозначный и нестягивающий оператор. Итерационный метод типа Дугласа–Рэкфорда для уравнения (3.2.9) имеет вид

$$t_h^{n+1} = J_R^r(2J_S^r - I)t_h^n + (I - J_S^r)t_h^n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.2.10)$$

Поскольку операторы R и S максимально монотонные и, кроме того, S — равномерно монотонный, при любом $r > 0$ итерационный процесс (3.2.10) сходится с любого начального приближения, при этом если t_h^* — предел последовательности t_h^k , то $P_h^* = J_S^r t_h^*$ — решение задачи (2.2.4).

Реализация итерационного метода (3.2.10) состоит в последовательном применении операторов J_R^r и J_S^r к известным функциям, что в свою очередь сводится к процедурам проектирования в V_h на $K_{0,h}$ и $K_{1,h}$. Именно, $y_h = J_R^r x_h$ означает, что $y_h = \text{Pr}_{K_{1,h}} x_h$, а $y_h = J_S^r x_h$ означает, что

$$y_h = \text{Pr}_{K_{0,h}}((1+r)^{-1}x_h + r(1+r)^{-1}P_{d,h}).$$

Таким образом, алгоритм (3.2.10) принимает вид

$$\begin{aligned} t_h^{n+1/2} &= \text{Pr}_{K_{0,h}}((1+r)^{-1}t_h^n + r(1+r)^{-1}P_{d,h}), \\ t_h^{n+1} &= t_h^n - t_h^{n+1/2} + \text{Pr}_{K_{1,h}}(2t_h^{n+1/2} - t_h^n). \end{aligned}$$

Операции проектирования на множества $K_{0,h}$ и $K_{1,h}$ легко реализуемы. Действительно, проектирование на $K_{0,h}$ есть задача квадратичного

программирования с ограничениями вида $BP = b$, решение которой выписывается в явном виде (ср. с (3.1.8)), а проектирование на $K_{1,h}$ осуществляется поточечно (ср. с (3.2.3)).

3.3. Непустота множества допустимых функций

Как следует из предыдущих результатов, одной из принципиальных является задача нахождения критического значения v_h^* параметра v_{\max} , по которому определяется непустота множества K_h и, следовательно, однозначная разрешимость задачи (2.2.4). Для проверки непустоты множества K_h можно решить следующую задачу минимизации:

$$\min_{P_h \in K_{0,h}} G(P_h), \quad (3.3.1)$$

где

$$G(P_h) = \int_0^{2\pi} (P_h - H_h)^{+2} d\tau = \sum_{i=1}^{n-1} h(P_i - H_i)^{+2},$$

а f^+ обозначает положительную часть f , т. е.

$$f^+ = \begin{cases} f, & \text{если } f \geq 0; \\ 0, & \text{если } f < 0. \end{cases}$$

Справедливо следующее утверждение о разрешимости рассматриваемой задачи.

Лемма 3.1. *Задача (3.3.1) имеет решение $P_h(v_{\max})$. Если на этом решении выполняется равенство $G(P_h(v_{\max})) = 0$, то*

$$P_h(v_{\max}) \in K_{0,h} \cap K_{1,h}$$

и множество $K_h \neq \emptyset$. В противном случае множество K_h пусто.

Доказательство. Очевидно, что доказательства требует только утверждение о существовании решения. Заметим, что G — выпуклый и непрерывный функционал. Остается доказать его коэрцитивность на

множестве $K_{0,h}$. Пусть $Q_h \in K_{0,h}$ и $\int_0^{2\pi} q_h^2 d\gamma \rightarrow \infty$. Обозначим через

$P_h = Q_h - H_h$. Тогда $\int_0^{2\pi} P_h^2 d\gamma \rightarrow \infty$. Ясно, что

$$\int_0^{2\pi} P_h^2 d\gamma = \int_0^{2\pi} (P_h^+)^2 d\gamma + \int_0^{2\pi} (P_h^-)^2 d\gamma,$$

где P_h^+ и P_h^- — положительная и отрицательная части функции P_h

соответственно. Если допустить, что интеграл $\int_0^{2\pi} (P_h^+)^2 d\gamma$ ограничен,

то из условия

$$\int_0^{2\pi} P_h d\gamma = \int_0^{2\pi} P_h^+ d\gamma - \int_0^{2\pi} P_h^- d\gamma = C_1 - \int_0^{2\pi} H_h^2 d\gamma = \text{const}$$

и эквивалентности норм в конечномерном пространстве следует, что интеграл $\int_0^{2\pi} (P_h^-)^2 d\gamma$ также ограничен. Таким образом, $\int_0^{2\pi} (P_h^+)^2 d\gamma \rightarrow +\infty$, т.е. $G(P_h) \rightarrow +\infty$, что означает коэрцитивность функционала G на множестве $K_{0,h}$.

Замечание 3.4. Из построения множеств K_h и \tilde{K}_h следует, что они пусты или нет одновременно. Поэтому для проверки непустоты \tilde{K}_h можно использовать решение задачи (3.3.1).

При решении задачи (3.3.1) были реализованы следующие методы.

Градиентный метод. Напомним, что множество $K_{0,h}$ в терминах узловых параметров имеет вид $\{P \in \mathbb{R}^N : BP = b\}$, поэтому требуется найти

$$\min_{BP=b} \{G(P) = \sum_{i=1}^{n-1} h(P_i - H_i)^2\}.$$

Очевидно, что функция $G \in C^{(1,1)}$, ее градиент $(\nabla G(P))_i = 2h(P_i - H_i)^+$ и она удовлетворяет условию Липшица с постоянной $A = 2h$.

Для решения поставленной задачи применим итерационный метод:

$$P^{k+1} = \text{Pr}_{K_{0,h}}(P^k - \rho \nabla G(P^k)), \quad (3.3.2)$$

где $\rho > 0$ — итерационный параметр. Из [121, с. 278] следует, что итерации P^k метода (3.3.2) сходятся к некоторому решению задачи (3.3.1) при $0 < \rho < 2/A = h$, при этом последовательность $\{G(P^k)\}$ монотонно убывает и стремится к точной нижней грани $G_* = \min_{BP=b} G(P)$.

Как следует из леммы 3.1, если при заданном v_{\max} оказывается $G_* = 0$, то множество K_h не пусто ($v_{\max} > v_h^*$). Если же $G_* \neq 0$, то множество K_h пусто. Метод (3.3.2) легко реализуется, поскольку процедура проекции на множество $K_{0,h}$ в данном случае очень простая.

Действительно, задача $x = \text{Pr}_{K_{0,h}} f$ равносильна задаче отыскания минимума функции $(1/2) \sum_{i=1}^n (x_i - f_i)^2$ на множестве $Bx = b$. Введя функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - f_i)^2 + \sum_{j=1}^3 \lambda_j (Bx - b)_j,$$

получим следующую систему для нахождения пары (x, λ) :

$$x + B^T \lambda = f, \quad Bx = b.$$

Отсюда для определения λ будем иметь систему трех алгебраических уравнений $BB^T \lambda = Bf - b$, решив которую методом Гаусса, найдем $x = f - B^T \lambda$.

Метод расщепления. Запишем задачу (3.3.1) в виде включения:

$$\nabla G(P) + \partial I_{K_{0,h}}(P) \ni 0, \quad (3.3.3)$$

где $\partial I_{K_{0,h}}$ — субдифференциал индикаторной функции

$$I_{K_{0,h}}(P) = \{0 \text{ при } P \in K_{0,h}, +\infty \text{ при } P \notin K_{0,h}\}$$

множества $K_{0,h}$. Итерационный метод Дугласа–Рэкфорда для задачи (3.3.3) реализуем в виде

$$\begin{aligned} \frac{P^{k+1/2} - P^k}{\tau} + \nabla G(P^k) + \partial I_{K_{0,h}}(P^{k+1/2}) &\ni 0; \\ \frac{P^{k+1} - P^{k+1/2}}{\tau} + \nabla G(P^{k+1} - p^k) &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку задача (3.3.3) имеет решение и операторы максимально монотонные, из результатов [121] следует сходимость итераций этого метода к некоторому решению (3.3.3) при любом положительном итерационном параметре τ и любом начальном приближении. Помимо метода Дугласа–Рэкфорда с постоянным итерационным параметром для задачи (3.3.3) был использован метод с возрастающей последовательностью параметров, именно $\rho_k = k$.

В вычислительных экспериментах задача (3.3.1) решалась методом проекции градиента и методом расщепления как с постоянным итерационным параметром, так и с возрастающей последовательностью параметров. Критерием остановки итераций было условие $\sum_{i=1}^{n-1} |P_i^{k+1} - P_i^k|^2 \leq 10^{-6}$. Оптимальные итерационные параметры методов определялись вычислительным экспериментом. Были получены критические значения v_h^* максимальной скорости для различных исходных данных. Например, для исходных параметров задачи $\varepsilon = 2$ и $\beta = 0,1$, $\beta = 0,2$ и $\beta = 0,34$ определены соответствующие интервалы $(1,10; 1,11)$, $(1,22; 1,23)$ и $(1,39; 1,40)$, содержащие критическое значение v_h^* .

Результаты проведенных вычислительных экспериментов показали, что методы расщепления предпочтительнее метода проекции градиента. Во-первых, методы расщепления позволяют с большей точностью определять критическое значение v_h^* : при их использовании с $v_{\max} > v_h^*$ значение функции $G(p(v_{\max}))$ становится равным нулю после относительно небольшого числа итераций. В то же время при решении задачи (3.3.1) методом проекции градиента при значениях $v_{\max} > v_h^*$, но близких к v_h^* , значение $G(p(v_{\max}))$ мало, однако нельзя с уверенностью сказать, что это лишь влияние вычислительных ошибок, и тем самым точно определить, при каком v_{\max} функционал

$G(p(v_{\max}))$ равен нулю. Кроме того, установлено, что методы расщепления обладают большей скоростью сходимости, чем методы проекции градиента. Если при v_{\max} существенно больше критического значения v_h^* преимущество не столь очевидно, то при значениях v_{\max} , близких к v_h^* , число итераций в методах расщепления меньше в несколько раз. Отметим, что задача (3.3.1) решалась также методом приведенного градиента. Его скорость сходимости и точность определения v_h^* близки к характеристикам метода проекции градиента. Таким образом, методы расщепления выигрывают в точности нахождения v_h^* , а общее число итераций меньше всего у метода расщепления с возрастающей последовательностью параметров.

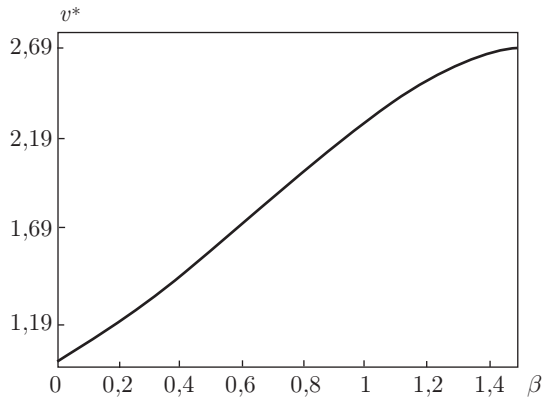


Рис. 3.1. Зависимость v^* от параметра β при $\varepsilon = 2$

Еще один существенный вопрос — как зависит величина v^* от параметра β . Проведенные вычислительные эксперименты позволили дать ответ на него.

На рис. 3.1 изображена зависимость критического значения v^* величины v_{\max} от параметра β , полученная в результате вычислительных экспериментов и позволяющая установить, при каких параметрах v_{\max} и β множество K будет непустым. Видно, что с ростом параметра β растет минимально допустимое значение v_{\max} , т.е. область K допустимых решений становится шире.

В гл. 4 будет установлено, что экспериментальная зависимость $v^* = v^*(\beta)$ с удовлетворительной точностью может быть описана аналитически.

3.4. Примеры построения квазирешений

3.4.1. Основная ОКЗА. Прежде всего приведем результаты вычислительных экспериментов по решению задачи (2.2.4) всеми описанными выше методами для следующего случая: $\varepsilon = 2$, $\beta = 0,2$ и началь-

ная функция P_d соответствует известным профилям Либекса (см. [118], а также примеры, приведенные ниже). Критерием остановки итераций было условие $\sum_{i=1}^{n-1} |P_i^{k+1} - P_i^k|^2 \leq 10^{-6}$. Оптимальные итерационные параметры методов определялись экспериментально. Установлено, что методы расщепления и метод, основанный на решении двойственной задачи, предпочтительней по сравнению с методом Удзавы.

Для указанных начальных данных было определено предельное значение $v_h^* = 1,23$, при котором множество K_h не является пустым. При выборе $v_{\max} < 1,23$ в задаче (2.2.4) рассмотренные методы совершали бесконечное число итераций (зависали). Этот факт может служить признаком отсутствия решения задачи, т.е. подтверждением точности определения критического значения $v_h^* = 1,23$.

На рис. 3.2, а представлено распределение скорости $v(\gamma)$ (линия 1), соответствующее известному профилю Либекса [118] с бесконечно тонкой задней кромкой ($\varepsilon = 2$), изображенному линией 1 на рис. 3.2, б; для

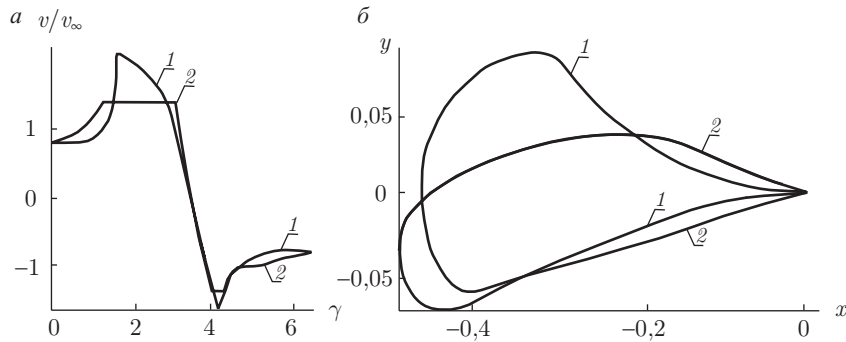


Рис. 3.2. Пример построения квазирешения с учетом ограничения на максимум скорости: а — исходное распределение скорости (1) и квазирешение (2) для $\varepsilon = 2$, $\beta = 0,1$ и $v_{\max} = 1,4$; б — исходный замкнутый контур (1) и контур, соответствующий квазирешению (2)

большей наглядности здесь и на последующих рисунках при изображении контуров профилей увеличен масштаб по оси ординат), который имеет теоретический угол атаки $\beta = 0,1$ (или $5,7^\circ$). Такое распределение скорости обеспечивает выполнение условий разрешимости (1.4.16), (1.4.17), а ограничения (1.4.19) выполняются лишь при $v_{\max} \geq 2,15$. Квазирешение основной ОКЗА (модифицированное распределение скорости) при $v_{\max} = 1,4$ изображено линией 2 на рис. 3.2, а, а сам профиль — на рис. 3.2, б. При построении квазирешения задача (2.2.4) решалась тремя описанными выше способами — методом (3.2.8), методом Удзавы (3.2.2) и методом расщепления (3.2.10). Число итераций составило соответственно 24, 29 и 20 при достижении одной и той же точности в нахождении минимума указанного выше функционала.

Интересно отметить, что в результате построения квазиразрыва получено распределение скорости с двумя «полками», (участками постоянства скорости): одна — на верхней, а другая — на нижней поверхности.

В следующих примерах (рис. 3.3–рис. 3.5) в качестве исходного распределения скорости использовано гидродинамически целесообразное распределение, построенное в соответствии с методами, изложенными

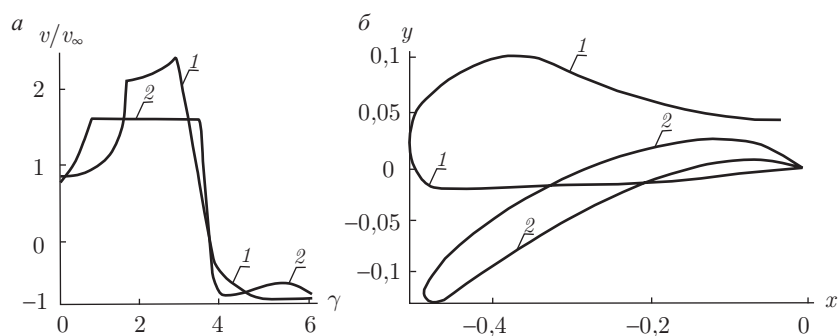


Рис. 3.3. Пример построения квазиразрыва с учетом ограничения на максимум скорости: *a* — исходное распределение скорости (1) и квазиразрыв (2) для $\epsilon = 2$, $\beta = 0,1$ и $v_{\max} = 1,6$; *б* — исходный разомкнутый контур (1) и контур, соответствующий квазиразрыву (2)

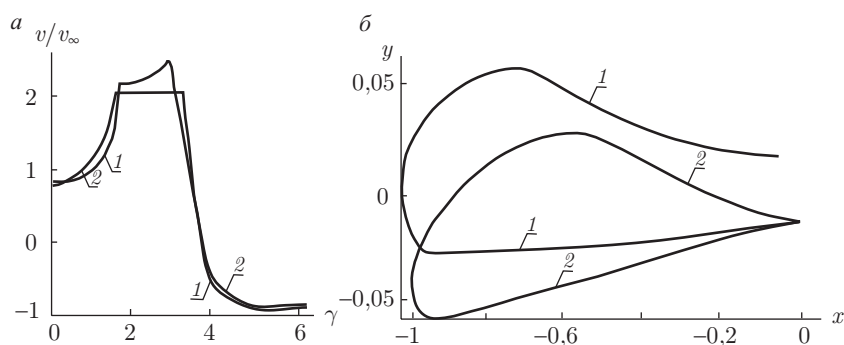


Рис. 3.4. Пример построения квазиразрыва с учетом ограничения на максимум скорости: *a* — исходное распределение скорости (1) и квазиразрыв (2) для $\epsilon = 2$, $\beta = 0,1$ и $v_{\max} = 2$; *б* — исходный контур (1) и контур, соответствующий квазиразрыву (2)

в гл. 6, и сходное с распределением Либекса (см. рис. 3.2, *a*). Распределение скорости $v(\gamma)$ для него, полученное с использованием связи (1.4.18), изображено линией 1 на рис. 3.3–рис. 3.5, *a*. Ему соответствуют значение $\beta = 0,1$ и разомкнутый контур, представленный линией 1 на рис. 3.3–рис. 3.5, *б* (т.е. условия разрешимости ОКЗА не выполняются). Очевидно, что заданное распределение скорости удовлетворяет ограничению (1.4.19) только при $v_{\max} > 2,4$. При максимальной скоро-

сти $v_{\max} = 1,6$ и при том же значении $\beta = 0,1$ квазирешение задачи представлено на рис. 3.3 линиями 2 (замкнутый контур и соответствующее распределение скорости $v(\gamma)$).

Пусть теперь $v_{\max} = 2$, а остальные исходные данные (распределение скорости и теоретический угол атаки) неизменны. Соответствующее квазирешение представлено на рис. 3.4. В примерах на рис. 3.3 и рис. 3.4 модифицированные распределения скорости имеют только по одной «полке».

На рис. 3.5 при тех же исходных данных реализовано квазирешение без учета ограничения на максимум скорости (замкнутый контур 2 и соответствующее распределение скорости).

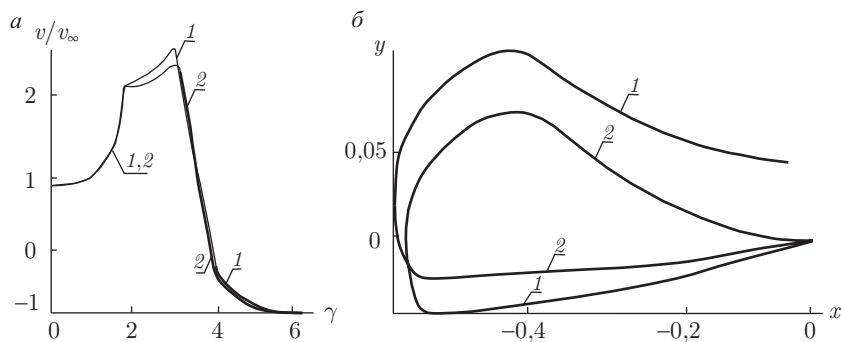


Рис. 3.5. Пример построения квазирешения без учета ограничения на максимум скорости: *a* — исходное распределение скорости (1) и квазирешение (2) для $\epsilon = 2$ и $\beta = 0,1$; *б* — исходный контур (1) и контур, соответствующий квазирешению (2)

В примерах, иллюстрированных на рис. 3.6–рис. 3.8, в качестве исходного использовано гидродинамически целесообразное распределение скорости (линия 1 на рис. 3.6–рис. 3.8, *a*), которому соответствуют значение $\beta = 0,3$ и разомкнутый контур (линии 1 на рис. 3.6, *б*–рис. 3.8, *б*). Ограничение (1.4.19) выполняется только при $v_{\max} \geq 1,6$. При $v_{\max} = 1,25$, $v_{\max} = 1,4$ и при том же значении $\beta = 0,3$ квазирешения задачи представлены на рис. 3.6 и рис. 3.7 соответственно линиями 2 (замкнутый контур и соответствующее распределение скорости $v(\gamma)$). Отметим, что новые распределения скорости снова имеют «полки» на обеих поверхностях контура.

При $v_{\max} = 1,6$ и том же значении $\beta = 0,3$ квазирешение задачи представлено на рис. 3.8. В данном случае модифицированное распределение скорости вообще не имеет «полок». Это объясняется, по-видимому, тем, что исходное распределение скорости удовлетворяет ограничению (1.4.19) (но не обеспечивает замкнутость искомого контура).

Для выявления тенденций изменения формы крыловых профилей, построенных как квазиreshения основной ОКЗА при учете ограничения

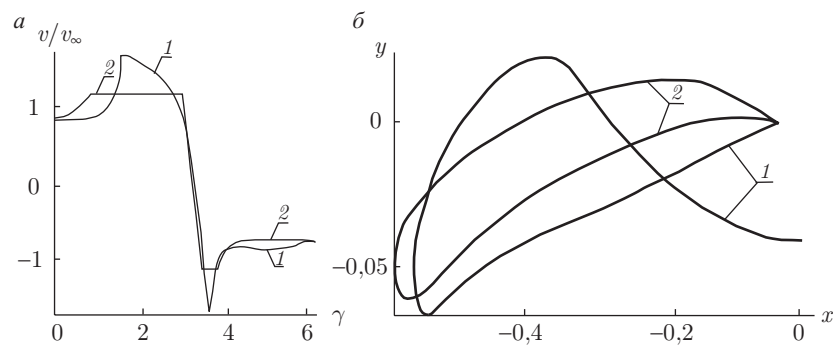


Рис. 3.6. Пример построения квазиreshения с учетом ограничения на максимум скорости: a — исходное распределение скорости (1) и квазиreshение (2) для $\varepsilon = 2$, $\beta = 0,3$ и $v_{\max} = 1,25$; b — исходный разомкнутый контур (1) и контур, соответствующий квазиreshению (2)

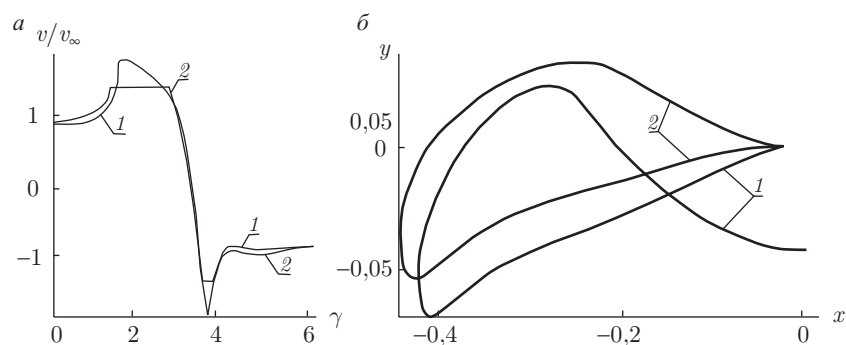


Рис. 3.7. Пример построения квазиreshения с учетом ограничения на максимум скорости: a — исходное распределение скорости (1) и квазиreshение (2) для $\varepsilon = 2$, $\beta = 0,3$ и $v_{\max} = 1,4$; b — исходный разомкнутый контур (1) и контур, соответствующий квазиreshению (2)

на максимум скорости, был проведен ряд вычислительных экспериментов. Их результаты представлены на рис. 3.9–рис. 3.13.

На рис. 3.9–рис. 3.11 построены квазиreshения, полученные для одного и того же исходного гидродинамически целесообразного распределения скорости (для $\varepsilon = 2$), но при разных величинах v_{\max} , ограничивающих максимальное значение скорости на контуре. Распределения $v = v(\gamma)$, соответствующие исходному распределению скорости, изображены линиями 1 на всех рисунках слева. При этом рассчитанная величина теоретического угла атаки $\beta = 0,15$. Линиями 1 на рисунках справа изображены контуры, отвечающие исходному распределению

$v(s)$, а линиями 2 слева и справа — модифицированные распределения скорости и соответствующие контуры профилей для квазирешений.

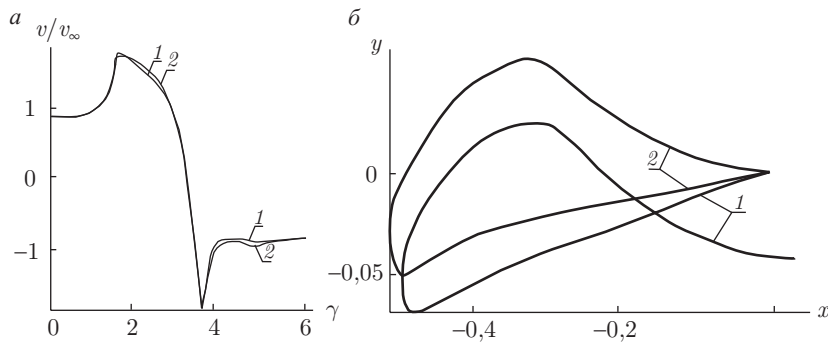


Рис. 3.8. Пример построения квазирешения с учетом ограничения на максимум скорости: a — исходное распределение скорости (1) и квазирешение (2) для $\varepsilon = 2$, $\beta = 0,3$ и $v_{\max} = 1,6$; b — исходный разомкнутый контур (1) и контур, соответствующий квазирешению (2)

Отличительной особенностью примеров, представленных на рис. 3.9, является то, что исходному распределению скорости соответствуют замкнутый контур (т.е. априори выполнены условия разрешимости основной ОКЗА) и $v_{\max} = 1,8$, поэтому на первом рисунке линии 1 и 2 совпадают. При уменьшении v_{\max} до значения $v_{\max} = 1,2$ получаем «полочные» модифицированные распределения скорости, профили квазирешений становятся тоньше и более изогнутыми и, наконец, приходим к неоднолистной области течения. Те же тенденции изменения формы профилей для квазирешений иллюстрирует рис. 3.10. В отличие от предыдущего случая здесь исходному распределению скорости соответствует разомкнутый и самопересекающийся контур, и снова $v_{\max} = 1,8$. Однако при уменьшении величины v_{\max} сначала получается неоднолистное течение при $v_{\max} = 1,4$, а затем при $v_{\max} = 1,2$ квазирешению соответствует физически реализуемый профиль.

На рис. 3.11 исходному распределению скорости соответствуют разомкнутый самонепересекающийся контур, а при $v_{\max} \geq 1,8$ выполняется ограничение на максимум скорости. При дальнейшем уменьшении v_{\max} сначала снова получаем «полочные» модифицированные распределения скорости, а затем и неоднолистное течение.

Все отмеченные выше тенденции изменения формы профилей для квазирешений иллюстрирует рис. 3.13, представляющий результаты вычислительных экспериментов для диапазонов изменения параметров $\beta \in [0, 1; 0,5]$, $v_{\max} \in [1,2; 3]$. На рис. 3.12, a представлено гидродинамически целесообразное распределение $v(s)$, близкое к описанному выше распределению Либика. Ему соответствуют значение $\beta = 0,1$ теоретического угла атаки и замкнутый контур, изображенный на рис. 3.12, b (он совпадает с контуром, представленным в верхней части левого

столбца на рис. 3.13). Ниже в левом столбце на рис. 3.13 расположены квазирешения, построенные при значениях v_{\max} , отмеченных по вертикали напротив каждой из строк. Второй столбец квазирешений построен для той же управляющей функции $P(\gamma)$, которая была определена по исходному распределению скорости $v(s)$, но уже для значения $\beta = 0,2$. Напомним, что в соответствии с теорией ОКЗА (см. [35]) сохранение управляющей функции и изменение теоретического угла атаки означают лишь изменение физического угла атаки уже построенного профиля. Соответствующее распределение $v(s)$, естественно, изменится, причем максимальное значение скорости может превзойти

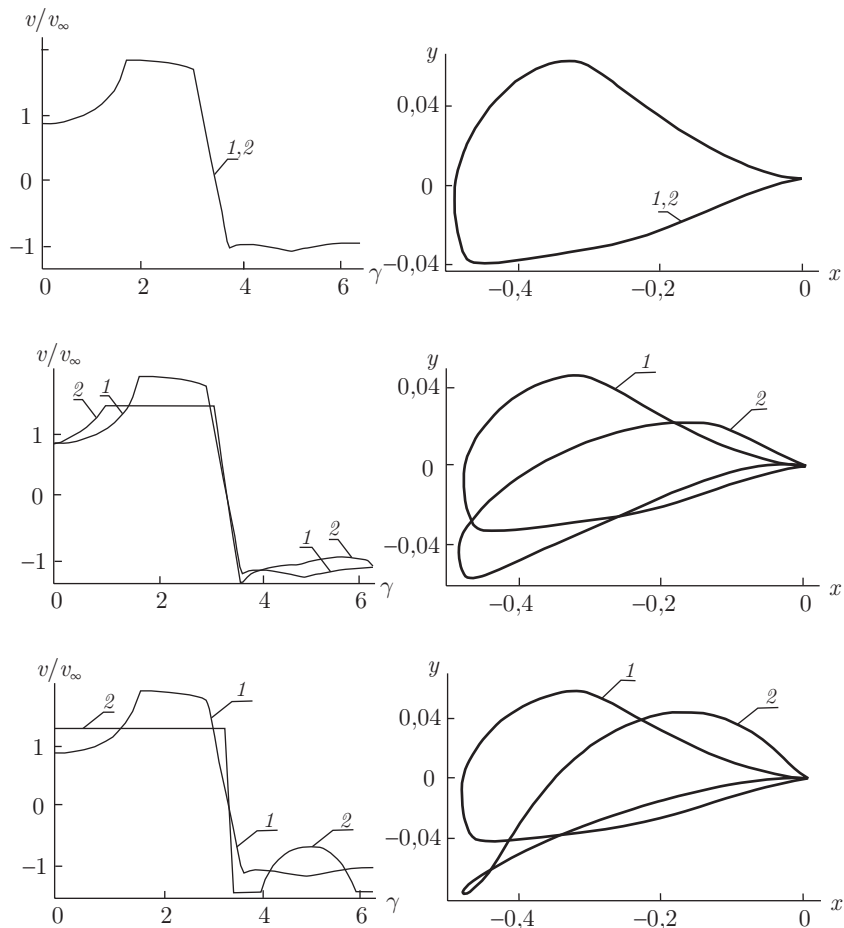


Рис. 3.9. Квазирешения, построенные для одного и того же исходного распределения скорости при $\varepsilon = 2$, $\beta = 0,15$ и значениях $v_{\max} = 2$; 1,5; 1,2: переход от замкнутого самонепересекающегося контура к неоднолистному течению

заданную величину v_{\max} . Именно по этой причине при построении квазирешения с учетом ограничения на максимум скорости изменится форма профиля, что и демонстрируют изображения во втором столбце.

Третий и последующие столбцы построены по той же процедуре: при сохранении управляющей функции изменяются лишь значения $\beta = 0,3; 0,4; 0,5$ (они отмечены на горизонтальной линии в нижней части рисунка под каждым столбцом).

Видны переходы к неоднолистным течениям, причем разные длины столбцов определяются тем, что при увеличении β растет минимально допустимое значение v^* максимальной скорости v_{\max} и поэтому при больших β становится пустым множество корректности задачи.

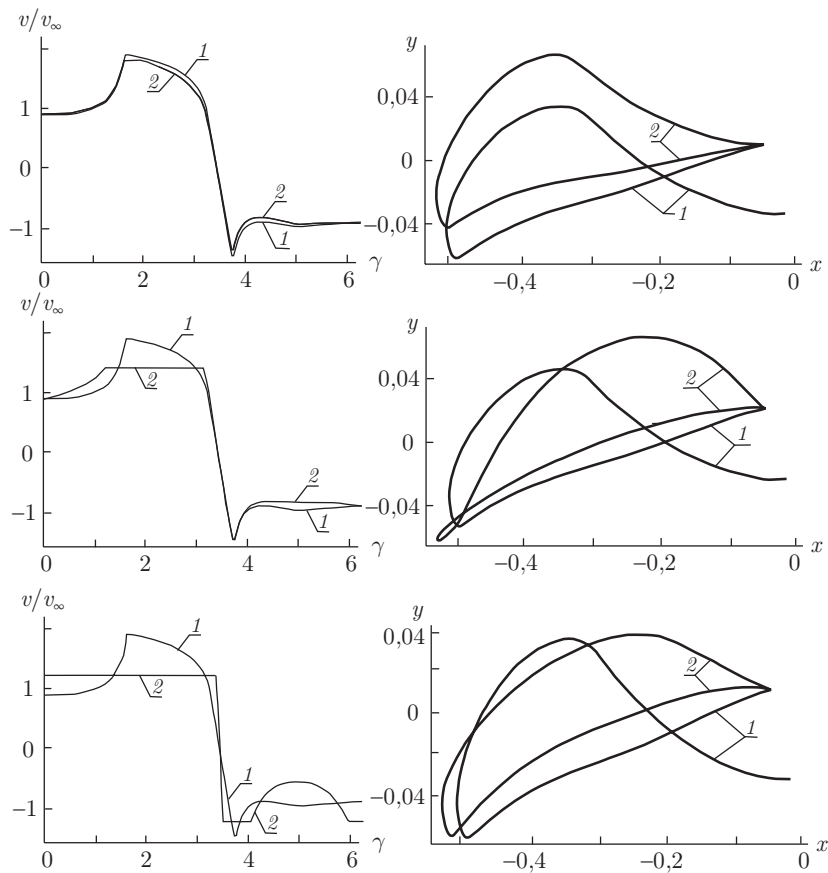


Рис. 3.10. Квазирешения, построенные для одного и того же исходного распределения скорости при $\varepsilon = 2$, $\beta = 0,15$ и разных значениях $v_{\max} = 1,8; 1,4; 1,2$: переход от разомкнутого самопересекающегося контура к неоднолистному течению

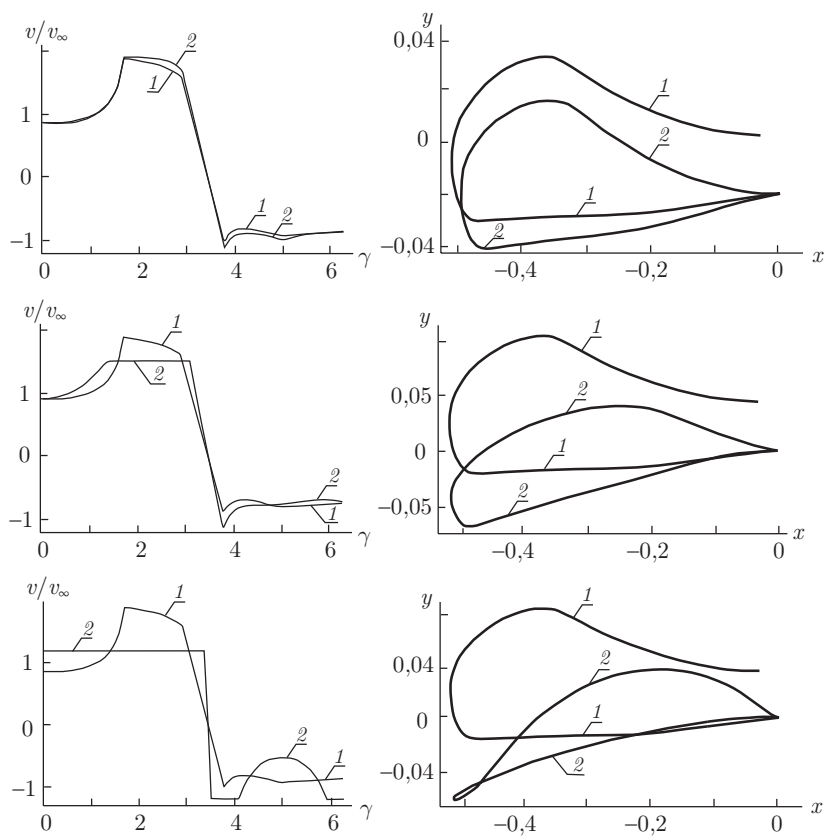


Рис. 3.11. Квазирешения, построенные для одного и того же исходного распределения скорости при $\epsilon = 2$, $\beta = 0,15$ и разных значениях $v_{\max} = 1,8; 1,4; 1,2$: переход от разомкнутого самонепересекающегося контура к неоднолистному течению

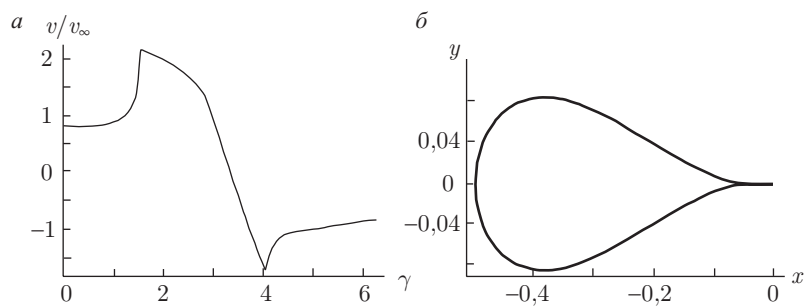


Рис. 3.12. Исходное гидродинамически целесообразное распределение скорости (а) и соответствующий ему замкнутый контур (б)

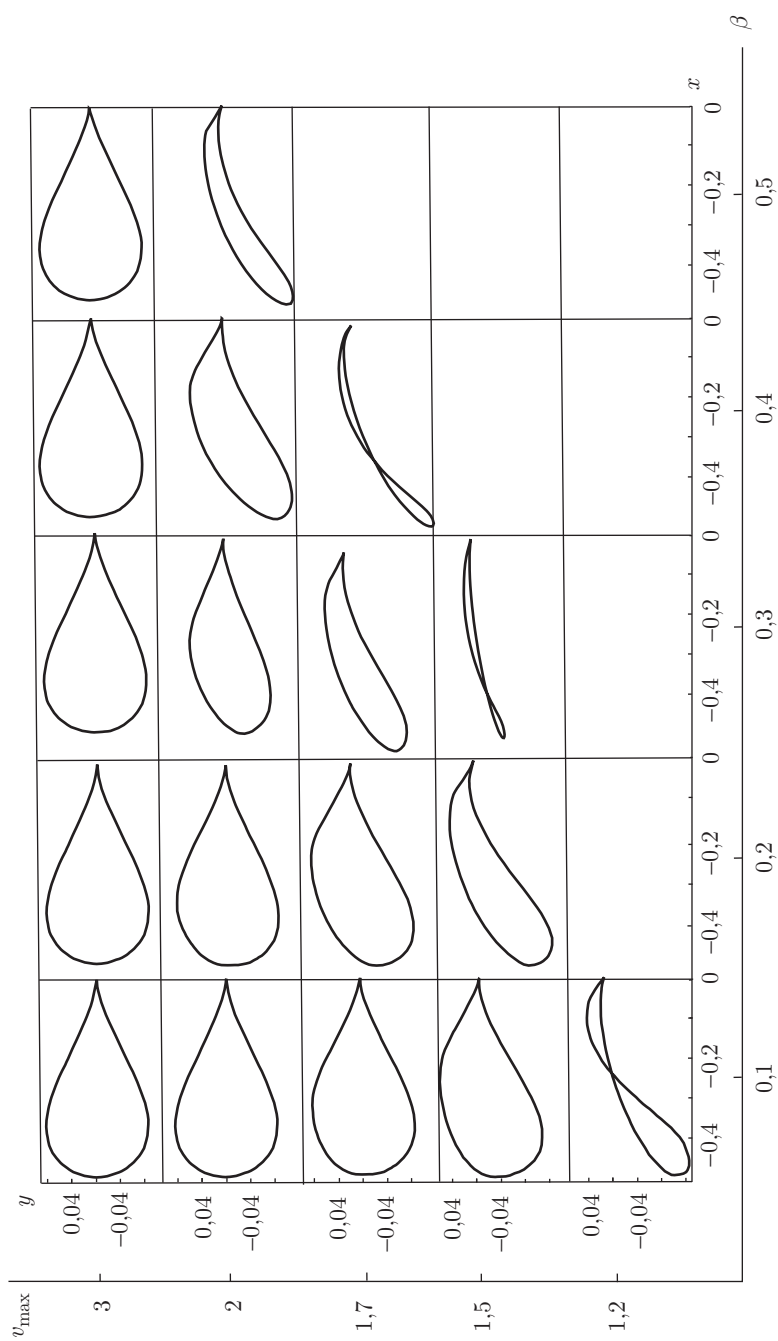


Рис. 3.13. Шкалы квазирешений с ограничением на максимум скорости в диапазоне параметров $\beta \in [0.1; 0.5]$, $v_{\max} \in [1.2; 3]$

Интересно отметить, что в этой ситуации переход к неоднолистным течениям происходит раньше, а для второго столбца вообще не наступает.

Для удобства описания рис. 3.13 ниже выборочно приведены значения минимально допустимых величин v^* максимального значения скорости v_{\max} для разных β , рассчитанные, как это описано в п. 1.2.2:

β	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
v^*	1,09	1,23	1,35	1,48	1,62

3.4.2. Диапазон углов атаки. На рис. 3.14 приведен пример построения симметричного профиля для $k = 1$ ($v_{\infty 1} = v_{\infty 2} = v_{\infty}$) и $\delta = 8^\circ$. Исходные распределения скорости (штрихпунктирная кривая 1 и пунктирная кривая 2 на рис. 3.14, а) выбраны по схеме 3 так, что $v_2(s) = -v_1(L - s)$, $s \in [0, s_0]$, $s_0 = L/2$. В этом случае $\alpha_1 = -\alpha_2 = \delta/2$ и условие совместимости начальных данных выполняется автоматически. В результате решения получен разомкнутый контур. После применения метода квазирешений без учета ограничения на максимум скорости построен профиль с замкнутым контуром (рис. 3.14, б), имеющий относительную толщину $t_{\max} = 16,43\%$ и коэффициент подъемной силы $C_{y1} = 0,485$ при $\alpha = \alpha_1 = 4^\circ$ (сплошная кривая 3 и штриховая кривая 4 — модифицированные распределения скорости $v_j(s)$ на всем контуре). Отметим, что на этом рисунке профиль изображен в системе координат (1.1.2), связанной с хордой профиля.

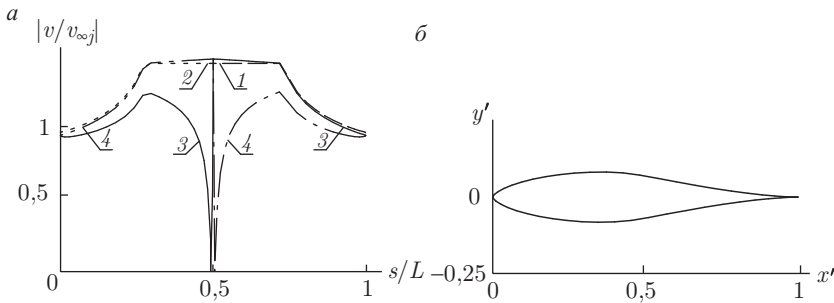


Рис. 3.14. Пример построения симметричного профиля для $\delta = 8^\circ$: а — исходные (1 и 2) и модифицированные (3 и 4) распределения скорости; б — замкнутый контур

В этом примере исходные функции $v_j(s)$ были выбраны произвольно, без учета требований гидродинамической целесообразности и оптимизации. Описание классов гидродинамически целесообразных распределений скорости в ОКЗА для диапазона углов атаки и нахождение среди таких распределений функций $v_j(s)$, обеспечивающих оптимизированные свойства профилей, содержатся в гл. 6.

Приведем теперь пример точного решения ОКЗА для диапазона углов атаки по обобщенному параметру. Пусть $v_j(\eta) = V_j = \text{const}$,

$j = 1, 2$, и длины участков контуров, на которые делит контур профиля точка C , не фиксированы. Значения V_1 и V_2 подберем так, чтобы обеспечить выполнение условия совместности начальных данных. В этом случае функция $P(\gamma)$ в (1.5.4) полностью определена. Очевидно, что решение задачи единственно. На рис. 3.15 штриховой линией представлено это решение для $V_1 = 1,12$, $V_2 = 1,13$, $\delta = 5^\circ$ и $k = 1$. Контур профиля разомкнут, точное решение задачи физически нереализуемо. После применения метода квазирешений без учета ограничения на максимум скорости получен замкнутый контур (сплошная линия на рис. 3.15). Модифицированные хордовые диаграммы скорости, восстановленные на всем контуре при $\alpha_2 = -2,06^\circ$ и $\alpha_1 = 2,94^\circ$ соответственно, представлены линиями 1 и 2.

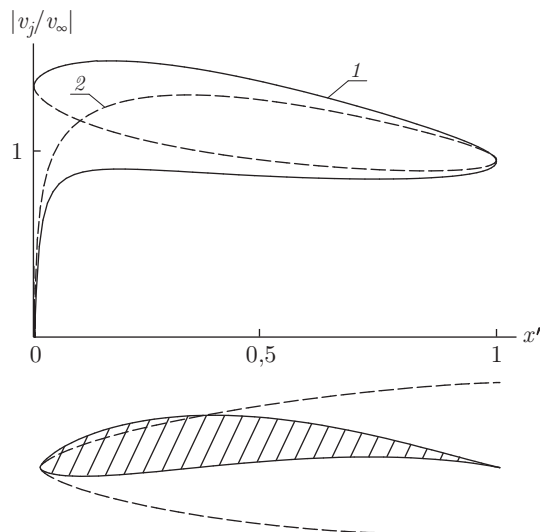


Рис. 3.15. Точное решение ОКЗА для диапазона углов атаки по хордовой диаграмме скорости

На рис. 3.16 представлен профиль с относительной толщиной 18,5%, построенный для $\delta = 11^\circ$ по хордовым диаграммам скорости, каждая из которых задана в виде ломаной, состоящей из двух прямолинейных отрезков (участки сплошной линии 1 для $j = 1$ и штриховой линии 2 для $j = 2$). Исходные данные были подобраны так, чтобы выполнить условие совместности начальных данных и условия разрешимости задачи. Для сходимости итерационного процесса понадобилось шесть итераций. Хордовым диаграммам, восстановленным в результате решения на всем профиле, соответствуют криволинейные участки линий 1 и 2.

Представленные, а также другие многочисленные примеры нахождения квазирешений различных ОКЗА в рамках разных математиче-

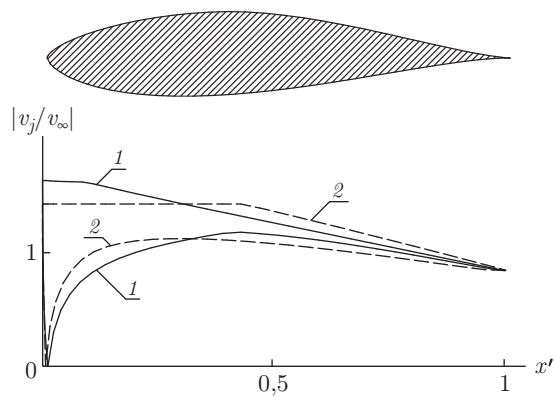


Рис. 3.16. Профиль, построенный по хордовым диаграммам скорости

ских моделей обтекания, содержащиеся в [35, 36, 109], подтвердили эффективность описанного выше метода квазирешений для построения крыловых профилей с учетом физически обоснованных ограничений.

3.5. Исторические замечания и библиографические ссылки

Впервые квазирешения ОКЗА построены в работах [28, 32, 33].

Проблема непустоты множества допустимых функций в задаче о квазирешениях ОКЗА поставлена и исследована в [37, 38, 43].

Примеры квазирешений ОКЗА с ограничением на максимум скорости численно реализованы А.Э. Илюхиным. Приведенные, а также другие примеры квазирешений в ОКЗА для диапазона углов атаки содержатся в работах [47, 48, 103–105].

Точное решение ОКЗА для диапазона углов атаки по хордовой диаграмме скорости и примеры квазирешений этой задачи можно найти в [106].

ПРОФИЛИ МАКСИМАЛЬНОЙ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ В ПОТОКЕ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Обсуждаемые ниже задачи связаны с поиском ответа на один из общих вопросов аэрогидродинамики, который в случае плоских течений можно сформулировать следующим образом. Какую максимальную подъемную силу можно получить на профиле крыла и какова форма такого профиля? Этот вопрос обсуждался во многих работах. Часть из них указана в разд. 4.5.

4.1. Основная вариационная ОКЗА

Среди множества возможных постановок вариационных ОКЗА выделим одну (назовем ее основной), решение задачи в которой непосредственно отвечает на сформулированный вопрос. Эта постановка содержит изопериметрическое условие (задание периметра контура профиля) и единственное дополнительное ограничение на наибольшее значение скорости на контуре ($\max v(s) \leq v_{\max}$). Точное решение этой задачи при достаточно больших значениях v_{\max} , полученное в рамках модели ИНЖ, дает экстремальное значение подъемной силы как максимизируемой характеристики и, следовательно, точную оценку подъемной силы при учете дополнительных ограничений. Сказанное объясняет присвоение этой задаче статуса основной. Дадим ее постановку для безграничного потока в случае модели ИНЖ (назовем ее задачей А).

4.1.1. Постановка задачи А. В плоскости $z = x + iy$ рассмотрим установившееся безотрывное обтекание потоком ИНЖ непроницаемого изолированного крылового профиля с контуром L_z из класса \mathbf{L} , описанного в разд. 1.4 (рис. 4.1). Внешний угол $\varepsilon\pi$ ($1 \leq \varepsilon \leq 2$) в заостренной задней кромке B ($z = 0$) задан заранее, периметр контура профиля $L = 2$. Поток на бесконечности является однородным, направленным горизонтально, его скорость $v_\infty = 1$, а плотность $\rho_\infty = 1$. Точкой схода потока является $z = 0$. В качестве масштаба длин снова возьмем полупериметр контура $L/2 = 1$. Требуется определить форму профиля, обеспечивающего максимальное значение коэффициента подъемной силы, при условии, что критические точки потока расположены на искомом контуре, а наибольшее значение скорости на контуре не превосходит заданной величины $v_{\max} > 1$.

Запишем основные соотношения, определяющие математическую модель задачи А, следуя результатам разд. 1.4.

В качестве канонической области возьмем внешность единичного круга $E^- = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$ (см. рис. 4.1). Рассмотрим обтекание единичного круга потоком ИНЖ, вектор скорости которого на бесконечности направлен вдоль оси абсцисс, модуль равен u , а критические точки $B = e^{-i\beta}$ и $A = e^{i\beta}$ на окружности (в которых скорость обращается в нуль) симметричны относительно вертикальной оси.

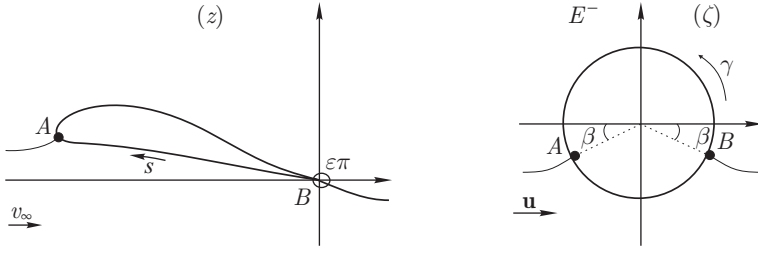


Рис. 4.1. К постановке задачи А

Кусочно-гладкие контуры $L_z \in \mathbf{L}$ замкнуты, имеют периметр $L = 2$ и являются образами единичной окружности при конформных отображениях $z = z_P(\zeta)$ области E^- , нормированных условиями $z_P(\infty) = \infty$, $z_P(e^{-i\beta}) = 0$ и имеющих представление — см. (1.4.6), (1.4.9), (1.4.13)

$$z'_P(\zeta) = 2[I_0(P)]^{-1} \exp[-(\mathbf{S}P)(\zeta)] \left(1 - \frac{e^{-i\beta}}{\zeta}\right)^{\varepsilon-1}, \quad (4.1.1)$$

где

$$(\mathbf{S}P)(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\gamma) \frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta} d\gamma,$$

$$I_0(P) = \int_0^{2\pi} G_0(P; \gamma) d\gamma, \quad G_0(P; \gamma) \equiv \exp[-P(\gamma)] \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|^{\varepsilon-1}, \quad (4.1.2)$$

а управляющая функция $P(\gamma)$ и управляющий параметр β (теоретический угол атаки) удовлетворяют дополнительным ограничениям — интегральным равенствам — см. (1.4.8), (1.4.16), (1.4.17):

$$A_0(P) = B_0, \quad A_1(P) = B_1, \quad A_2(P) = B_2, \quad (4.1.3)$$

$$A_0(P) \equiv \int_0^{2\pi} P(\tau) d\tau, \quad A_1(P) \equiv \int_0^{2\pi} P(\tau) \cos \tau d\tau, \quad A_2(P) \equiv \int_0^{2\pi} P(\tau) \sin \tau d\tau,$$

$$B_0 = 0, \quad B_1 + i B_2 = -\pi(\varepsilon - 1) \exp(-i\beta).$$

Задав произвольно функцию $P(\gamma)$, удовлетворяющую указанным ограничениям, и величину β , восстановим функцию $\chi(\zeta)$ по формуле Шварца (1.4.6) и, следовательно, получим для $z_P(\zeta)$ представление вида (4.1.1). В нем постоянная β характеризует ориентацию профи-

ля, ограниченного контуром L_z , относительно набегающего потока. В отличие от интегрального представления решения основной ОКЗА в данном случае функция $P(\gamma)$ и параметр β не определяются по начальным данным задачи, а являются управляющими. Взяв в представлении (4.1.1) граничные значения при $\zeta = e^{i\gamma}$, получим параметрические уравнения замкнутого кусочно-ляпуновского контура L_z , имеющего фиксированный периметр $L = 2$ и самое большее одну острую кромку в точке $z = 0$ с фиксированным углом $\varepsilon\pi$, внутренним к области течения.

Обратно, для любой области, ограниченной замкнутым кусочно-ляпуновским контуром указанного типа, конформное отображение $z_P(\zeta)$, как известно [75], имеет вид (4.1.1), причем в силу выбора нормировки $z_P(\infty) = \infty$, $z_P(e^{-i\beta}) = 0$ контур L_z задан с точностью до вращения около начала координат. Таким образом, оператор (4.1.1) дает описание широкого класса профилей с кусочно-гладкими границами.

Напомним, что теоретический угол атаки β имеет вполне определенный физический смысл: он равен углу отклонения профиля от направления обтекания с нулевой подъемной силой. Случай, когда угол β фиксирован заранее, соответствует дополнительному ограничению на угол атаки искомого профиля.

Запишем теперь условие ограниченности максимальной скорости на контуре заданной величиной v_{\max} — см. (1.4.19):

$$P(\gamma) \leq H(\gamma) \equiv H_0(\gamma, \beta) + (\varepsilon - 1) \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|, \quad (4.1.4)$$

$$H_0(\gamma, \beta) \equiv \ln \frac{v_{\max}}{M(\gamma, \beta)}, \quad M(\gamma, \beta) = 2 |\sin \gamma + \sin \beta|.$$

В качестве первого приближения в исследовании основной вариационной ОКЗА рассмотрим упрощенный ее вариант, который назовем задачей В.

Задача В. Найти непроницаемый контур из класса **L**, максимизирующий величину подъемной силы при безотрывном обтекании профиля потоком ИНЖ с заданными величинами $v_\infty = 1$ и $\rho_\infty = 1$ скорости на бесконечности и плотности, когда критические точки находятся на искомом контуре.

Сведем задачу В к вариационной ОКЗ для аналитической функции.

Пусть $w(z)$ — комплексный потенциал течения в области G_z , имеющий представление (1.1.13) в окрестности бесконечности. Обозначим

$$\Xi = \left| \int_{L_z} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz \right|.$$

В силу равенства (1.1.13) и теоремы Жуковского о подъемной силе (1.1.9) имеем

$$\Xi = 2v_\infty \Gamma = \frac{2Y}{\rho_\infty} = 8\pi v_\infty^2 |z'(\infty)| \sin \beta. \quad (4.1.5)$$

Следовательно, для максимизации подъемной силы при фиксированном значении β необходимо максимизировать функционал Ξ на взаимосвязанных классах контуров L_z и функций $w(z)$ из (1.1.13). Далее, по постановке задачи контуры L_z непроницаемы. Это условие, как известно, равносильно требованию $\operatorname{Im} w(z)|_{L_z} = 0$. Таким образом, при фиксированных значениях ρ_∞ , v_∞ , ε и β задача В эквивалентна следующей вариационной ОКЗ: *найти область G_z , ограниченную контуром L_z из указанного выше класса, и аналитическую в G_z функцию $w(z)$ вида (1.1.13) по условиям*

$$\operatorname{Im} w(z)|_{L_z} = 0, \quad \Xi \rightarrow \max.$$

Сведем эту задачу к задаче вариационного исчисления.

Так как $|z'(\infty)| = u$, в силу соотношения (4.1.5) получим

$$\Xi = 8\pi v_\infty^2 L \frac{\sin \beta}{I_0(P)}.$$

Следовательно, для максимизации Ξ (и Y) нужно минимизировать функционал $J(P; \beta) = I_0(P)/\sin \beta$ на допустимых функциях из множества (см. (4.1.3))

$$U = \{P(\gamma) \in H(A, \alpha) :$$

$$A_0(P) = 0, \quad A_1(P) + i A_2(P) = -\pi(\varepsilon - 1) e^{-i\beta}\}. \quad (4.1.6)$$

Так как параметр β и управляющая функция $P(\gamma)$ не связаны друг с другом, оптимальное значение $\beta = \beta_* = \pi/2$, что соответствует обтеканию контура с совпадением точек разветвления и схода потока.

4.1.2. Существование и единственность решения задачи В. Исследуем теперь свойства функционала $I_0(P)$.

Теорема 4.1. *Функционал $I_0(P)$ является строго выпуклым на непустом выпуклом компактном множестве $U \subset L_2[0, 2\pi]$ и, следовательно, задача минимизации $I_0(P)$ на U однозначно разрешима.*

Доказательство. Так как функционал $I_0(P)$, очевидно, дважды непрерывно дифференцируем, то для его строгой выпуклости необходимо и достаточно выполнение известного критерия

$$\langle (I_0'' P) \xi, \xi \rangle > 0 \quad \text{для всех} \quad 0 \neq \xi(\gamma) \in L_2[0, 2\pi], \quad P(\gamma) \in U.$$

Здесь $\langle (I_0'' P) \xi, \xi \rangle$ обозначает скалярное произведение линейного функционала $(I_0'' P)(\xi)$ и элемента $\xi \in L_2[0, 2\pi]$. Имеем

$$\langle (I_0'' P) \xi, \xi \rangle = \int_0^{2\pi} G_0(P; \gamma) \xi^2(\gamma) d\gamma > 0.$$

Далее, множество U , как нетрудно проверить, непустое, выпуклое и ограниченное в пространстве C^α гёльдеровских функций. Следовательно, U выпукло и компактно в пространстве $L_2[0, 2\pi]$. Теперь утвер-

ждение теоремы получается как следствие теоремы Вейерштрасса о достижении непрерывным функционалом нижней грани на множестве из нормированного пространства. Теорема доказана.

Рассмотрим задачу минимизации $I_0(P)$ на линейном подпространстве $U_0 \subset L_2[0, 2\pi]$, определенном только условиями (4.1.3) (без требования гёльдеровости $P(\gamma)$). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Функционал $I_0(P)$ достигает глобального минимума на подпространстве $U_0 \subset L_2[0, 2\pi]$, равного 2π , в точке*

$$P_*(\gamma) = (\varepsilon - 1) \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|.$$

Доказательство. Составим расширенный функционал

$$\Psi(P) = I_0(P) + \mu_0 A_0(P) + \mu_1 A_1(P) + \mu_2 A_2(P),$$

где μ_0, μ_1, μ_2 — неопределенные множители Лагранжа. Необходимое условие экстремума функционала $\Psi(P)$ в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ эквивалентно выполнению для любых 2π -периодических функций $\xi(\gamma) \in L_2[0, 2\pi]$ равенства

$$\int_0^{2\pi} \{-G_0(P; \gamma) + \mu_0 + \mu_1 \cos \gamma + \mu_2 \sin \gamma\} \xi(\gamma) d\gamma = 0.$$

Следовательно, экстремаль $P_*(\gamma)$ имеет представление

$$\exp[-P_*(\gamma)] = (\mu_0 + \mu_1 \cos \gamma + \mu_2 \sin \gamma) \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|^{1-\varepsilon}.$$

Запишем функцию $P_*(\gamma)$ в следующем виде:

$$P_*(\gamma) = \operatorname{Re} \chi_*(e^{i\gamma}), \quad (4.1.7)$$

$$\chi_*(\zeta) = (\varepsilon - 1) \ln \left(1 - \frac{e^{-i\beta}}{\zeta} \right) - 2 \ln \left(1 - r \frac{e^{i\nu}}{\zeta} \right),$$

причем $\mu_0 = r^2 + 1$, $\mu_1 = -2r \cos \nu$, $\mu_2 = -2r \sin \nu$, а r и ν подлежат определению. Теперь условия (4.1.3) эквивалентны однозначности функции

$$g(\zeta) = \int \left(1 - \frac{e^{-i\beta}}{\zeta} \right)^{\varepsilon-1} \exp[-\chi_*(\zeta)] d\zeta = \int \left(1 - r \frac{e^{i\nu}}{\zeta} \right)^2 d\zeta, \quad (4.1.8)$$

т. е. равенству нулю вычета ее производной. Этот вычет равен $-2r e^{i\nu}$. Следовательно, имеем $r = 0$ и $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Строгая выпуклость функционала $\Psi(P)$ гарантирует единственность этого решения. Теорема доказана.

В силу условия (4.1.6) имеет место включение $U \subset U_0$. При $\varepsilon = 1$ функция $P_*(\gamma) \equiv 0 \in U$, $I_0(P_*) = 2\pi$ и максимум подъемной силы достигается при обтекании круга радиуса $L/(2\pi) = \pi^{-1}$. Таким образом,

из доказанной теоремы в частном случае вытекает, что среди профилей с гладким контуром заданной длины максимальную подъемную силу при плавном обтекании потоком ИНЖ имеет круг, причем точки разветвления и схода потока совпадают. В этом случае абсолютный максимум Υ^* безразмерной циркуляции $\Upsilon = \Gamma/(v_\infty L)$ есть $\Upsilon^* = 2$. Отметим, что для обтекания круга свойство достижения максимума циркуляции при совпадении критических точек хорошо известно (см., например, [67]). Аналогичный результат получен в статьях [1, 2] в случае расположения на окружности точечных особенностей. При этом их наличие приводит не только к изменению топологии течения, но и к значительному увеличению максимального значения циркуляции скорости (от $\Upsilon^* = 2$ до $\Upsilon^* = 6$). Если же теперь вместо окружности взять множество гладких контуров с фиксированным периметром L , обтекаемых потоком ИНЖ с какой-либо из указанных выше топологий течения, то из теоремы 4.2 следует, что экстремалью будет круг, а выбранная схема обтекания определит дополнительные соотношения, связывающие свободные параметры (в частности, положение точечных особенностей) и фиксированные параметры задачи (в частности, величины расходов). В результате придем к параметрическому исследованию задачи обтекания круга с точечными особенностями на окружности при варьировании расположения изолированных особенностей и величин их интенсивностей. Такое исследование не представляет принципиальных трудностей и проведено в упомянутых работах [1, 2].

Так как длину b хорды профиля и ее направление можно определить лишь после нахождения управляющей функции, соответствующей оптимизированному профилю, угол атаки α можно отыскать только после нахождения оптимального решения. Поэтому коэффициент подъемной силы $\tilde{C}_y = 2Y/(\rho_\infty v_\infty^2 b)$ также может быть рассчитан лишь после нахождения оптимального решения. При этом в силу соотношения (4.1.5) и условия $L = 2$ имеем

$$\tilde{C}_y = \frac{8\pi L \sin \beta}{bI_0(P)} = 16\pi \sin \beta / [bI_0(P)]. \quad (4.1.9)$$

Из равенства (4.1.9) и теоремы 4.2 следует оценка

$$\tilde{C}_y \leq \frac{16\pi \sin \beta}{bI_0(P_*)} = 8b^{-1} \sin \beta. \quad (4.1.10)$$

Неравенство (4.1.10) дает оценку сверху для коэффициента \tilde{C}_y на рассматриваемом множестве профилей. Если же взять коэффициент подъемной силы в виде (1.4.20), то экстремальная функция $P_*(\gamma)$ позволяет сразу записать точное максимальное значение величины C_y .

Если $\varepsilon \in (1, 2]$, то функция $P_*(\gamma)$ имеет логарифмическую особенность и $P_*(\gamma) \notin U$. Следовательно, задача минимизации функционала $I_0(P)$ эквивалентна наилучшей аппроксимации в $L_2[0, 2\pi]$ функции $P_*(\gamma)$ множеством U .

Теорема 4.3. Единственным наилучшим приближением в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ функции $P_*(\gamma)$ на множестве U при некотором значении $A = A(n)$ коэффициента Гёльдера является n -й отрезок

$$S_n P_* = \sum_{k=1}^n d_k \varphi_k(\gamma) \quad (4.1.11)$$

ряда Фурье функции $P_*(\gamma)$ по тригонометрической системе $\{\varphi_k\}$ ($\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = \cos \gamma$, $\varphi_3 = \sin \gamma$, $\varphi_4 = \cos 2\gamma$, $\varphi_5 = \sin 2\gamma$, ...). При этом имеет место неуклучшаемая в смысле порядка оценка

$$\|P_*(\gamma) - (S_n P_*)(\gamma)\|_{\delta, q} \leq C H_q(P_*, \lambda) n^{-(\mu-\delta)}, \quad (4.1.12)$$

где $q = 2$, $1 \geq \mu > \delta > 0$, $C = C(P_*, \mu)$ — постоянная,

$$\begin{aligned} & \|\bullet\|_{\delta, q} = \|\bullet\|_{L_q} + H_q(\bullet, \delta), \\ H_q(P_*, \delta) = & \begin{cases} \sup_{t \neq 0} [t^{-\delta} \|P_*(\gamma + t) - P_*(\gamma)\|_{L_q}], & \delta \in (0, 1), \\ \sup_{t \neq 0} [t^{-1} \|P_*(\gamma + t) - 2P_*(\gamma) + P_*(\gamma - t)\|_{L_q}], & \delta = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим всюду плотное в U множество тригонометрических сумм (4.1.11). Как известно (см., например, [61]), единственное наилучшее приближение в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ функции $P_*(\gamma)$ линейными комбинациями указанного вида дает тригонометрический полином $S_n P_*$. Очевидно, что функция $S_n P_* \in U$ при соответствующем значении A коэффициента Гёльдера. Оценку отклонения $\|S_n P_* - P_*\|_{L_2}$ можно получить, используя аппроксимацию в H -пространствах [17], [18]. В частности, банахово пространство H_q^δ , $q \in [1, \infty)$, $\delta \in (0, 1]$, с нормой $\|\bullet\|_{\delta, q}$, указанной выше, состоит из функций $r(\gamma) \in L_q$, которые удовлетворяют условию $H_q(r, \delta) < \infty$. В силу критерия [17] принадлежности к пространству H_q^δ функция $P_*(\gamma) \in H_q^\delta$. Теперь оценка (4.1.12) следует непосредственно из теоремы 3 в [17]. Доказательство закончено.

Итак, функция $S_n P_*$ дает решение задачи на множестве U при некотором значении $A = A(n)$. Соответствующий $S_n P_*$ профиль имеет одну острую кромку с углом $\varepsilon\pi$ и при $n \rightarrow \infty$ неограниченно приближается к кругу. Эти же результаты получались в вычислительных экспериментах, проведенных при различных n , ε и β .

На множество U можно наложить дополнительные ограничения, гарантирующие простоту и определенное геометрическое строение контура L_z . Они выражаются в виде достаточных условий однолистности [5, 6], которые приводят к ограничениям на постоянную A в условии Гёльдера и к сужению множества U . Построенное таким способом множество допустимых решений выступает в качестве множества корректности, а поиск в нем наилучшего приближения к функции $P_*(\gamma)$ равносильен нахождению квазирешения задачи.

Описанная схема решения изопериметрических вариационных задач рассматриваемого типа существенно использует отсутствие ограничений, связывающих управляющую функцию $P(\gamma)$ и управляющие параметры (в простейшем случае, параметр β). Нелинейная же зависимость управляющих параметров между собой определяется выбором схемы обтекания (в простейшем случае полностью непроницаемого контура такая зависимость также отсутствует). Связь функции $P(\gamma)$ и управляющих параметров появляется при введении дополнительных ограничений при оптимизации. Последние естественным образом возникают в основной вариационной ОКЗА (в задаче A).

4.1.3. Существование и единственность решения задачи A .

Исследование разрешимости задачи A основано на связи (1.4.20) управляющей функции $P(\gamma)$ и параметра оптимизации β с коэффициентом C_y подъемной силы: для максимизации C_y нужно минимизировать функционал $J_0(P, \beta) = I_0(P) \operatorname{cosec} \beta$ при ограничениях (4.1.3) и (4.1.4). Представим управляющую функцию $P(\gamma)$ в виде

$$P(\gamma) = T(\gamma) + (\varepsilon - 1) \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|. \quad (4.1.13)$$

После подстановки в (4.1.2) и (4.1.3) получим

$$I_0(P) = J(T), \quad J(T) = \int_0^{2\pi} \exp[-T(\tau)] d\tau,$$

причем $J_0(P, \beta) = J(T) \operatorname{cosec} \beta$, $A_0(T) = A_1(T) = A_2(T) = 0$ и ограничение (4.1.4) примет вид

$$T(\gamma) \leq H_0(\gamma, \beta). \quad (4.1.14)$$

Таким образом, задача A состоит в следующем: *найти функцию $T^* \in K = K_0 \cap \tilde{K}_1$, минимизирующую функционалу $J(T) \operatorname{cosec} \beta$. В данном случае множества K_0 и \tilde{K}_1 имеют вид (см. п. 2.2.1)*

$$\begin{aligned} \tilde{K}_0 &= \{T(\gamma) \in L_2[0, 2\pi] : \int_0^{2\pi} T(\gamma) d\gamma = \int_0^{2\pi} T(\gamma) \cos \gamma d\gamma = \\ &= \int_0^{2\pi} T(\gamma) \sin \gamma d\gamma = 0\} \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

$$\tilde{K}_1 = \{T(\gamma) \in L_2[0, 2\pi] : T(\gamma) \leq H_0(\gamma, \beta) \text{ для п. в. } \gamma \in [0, 2\pi]\}. \quad (4.1.16)$$

В отличие от задачи о квазирешениях в данном случае и минимизируемый функционал, и множество \tilde{K}_1 зависят от управляющего параметра β . Вместе с тем для множества K справедливы утверждения леммы 2.1, в частности, $K \neq \emptyset$ при $v_{\max} \geq v^*$ и $K = \emptyset$ при $v_{\max} < v^*$.

При этом величина v^* непрерывно зависит от β , $v^*(\beta) > 1$ при $\beta > 0$ и $v^*(0) = 1$.

В силу теоремы 4.1 функционал $J(T)$ строго выпуклый в пространстве $L_2[0, 2\pi]$, $\inf_{T(\gamma) \in \widetilde{K}_0} J(T) = 2\pi$ и достигается на единственной функции $T(\gamma) = T_*(\gamma) \equiv 0$, не зависящей от величины ε . При $v_{\max} \geq 4$ функция $T_*(\gamma)$ автоматически удовлетворяет ограничению (4.1.14). В этом случае искомый оптимальный профиль определяется отображением $z^*(\zeta) = (\zeta + i)/\pi$ и является кругом радиуса $1/\pi$, обтекаемым потоком ИНЖ так, что совпадают точки разветвления и схода потока. Абсолютный максимум C_y^* коэффициента C_y есть $C_y^* = 8$, а абсолютный максимум Υ^* безразмерной циркуляции $\Upsilon = \Gamma/(v_\infty L) = C_y/4$ равен 2.

Покажем теперь, что круг не будет экстремалью ни при каких значениях $1 < v_{\max} < 2$.

Действительно, кругу всегда соответствуют $T(\gamma) = T_* \equiv 0$ и $\varepsilon = 1$. В этом случае неравенство (4.1.4) примет вид

$$\max_{\gamma \in [0, 2\pi]} \ln M(\gamma, \beta) \leq \ln v_{\max}$$

или, иначе, $2(1 + \sin \beta) \leq v_{\max}$, что невозможно при $1 < v_{\max} < 2$, так как $\beta > 0$.

Укажем теперь оценки границ изменения управляющего параметра β (см. [35, с. 357]).

Лемма 4.1. Пусть $\mathbf{F}(\mathbf{a})$ — множество аналитических в области E^- функций вида

$$F_a(\zeta) = \frac{a}{\zeta} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \zeta^{-k}, \quad |\zeta| > 1,$$

с фиксированным коэффициентом $a \neq 0$, а граничные значения $f_a(\gamma) = \operatorname{Re} F_a(e^{i\gamma})$ — интегрируемая функция. На классе $\mathbf{F}(\mathbf{a})$ имеет место равенство

$$N \equiv \inf_{F_a \in \mathbf{F}(\mathbf{a})} \sup_{\gamma \in [0, 2\pi]} f_a(\gamma) = \frac{|a|}{2},$$

причем инфимум не достигим на $\mathbf{F}(\mathbf{a})$, т.е. для любой функции $f_a(\gamma)$ имеем

$$\sup_{\gamma \in [0, 2\pi]} f_a(\gamma) > \frac{|a|}{2}. \quad (4.1.17)$$

Пусть

$$F_a(\zeta) = \chi(\zeta) + \ln \left[\left(1 - \frac{e^{-i\beta}}{\zeta} \right) \left(1 + \frac{e^{i\beta}}{\zeta} \right) \right] - (\varepsilon - 1) \ln \left(1 - \frac{e^{-i\beta}}{\zeta} \right),$$

где $\chi(\zeta) = (\mathbf{S}P)(\zeta)$. Имеем

$$\begin{aligned} f_a(\gamma) &= \operatorname{Re} F_a(e^{i\gamma}) = P(\gamma) + \ln M(\gamma, \beta) - (\varepsilon - 1) \ln \left[2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right] = \\ &= P(\gamma) - H(\gamma) + \ln v_{\max} = T(\gamma) - H_0(\gamma, \beta) + \ln v_{\max} \leq \ln v_{\max}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $F_a(\zeta) \in \mathbf{F}(\mathbf{a})$ при $a = 2i \sin \beta$. Из (4.1.17) следует, что

$$\sup_{\gamma \in [0, 2\pi]} f_a(\gamma) > \sin \beta.$$

В силу (4.1.4) отсюда выведем, что необходимо выполнение неравенства $\sin \beta \leq \ln v_{\max}$. Значит, при $1 \leq v_{\max} < e$ имеем оценки

$$\beta^* \leq \arcsin \ln v_{\max}, \quad \Upsilon^* \leq 4\pi \sin \beta^* / I_0(P_*) \leq 2 \ln v_{\max},$$

где β^* — экстремальное значение β . При $e \leq v_{\max} \leq 4$ получим $\beta^* \leq \pi/2$ и $\Upsilon^* \leq 2$.

Для оценки величины Υ^* снизу сузим множество допустимых пар (T, β) , заменив неравенство (4.1.14) следующим:

$$\begin{aligned} T(\gamma) + \max_{\gamma \in [0, 2\pi]} \ln M(\gamma, \beta) = \\ = T(\gamma) + \ln[2(1 + \sin \beta)] \leq \ln v_{\max}, \quad \gamma \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Очевидно, что при выполнении (4.1.18) исходное ограничение (4.1.14) также будет выполнено.

В силу ограничения $A_0(T) = 0$ функция $T(\gamma)$ не может быть знакостоянной. Поэтому

$$\max_{\gamma \in [0, 2\pi]} T(\gamma) \geq 0. \quad (4.1.19)$$

В силу (4.1.18) имеем

$$T(\gamma) \leq \ln v_{\max} - \ln[2(1 + \sin \beta)].$$

Отсюда с учетом (4.1.19) получим $\sin \beta \leq (v_{\max} - 2)/2$. Значит, при $v_{\max} < 2$ задача минимизации функционала $J(T) \operatorname{cosec} \beta$ при ограничениях (4.1.3) и (4.1.18) неразрешима и таким способом оценку снизу для Υ^* на этом интервале получить не удастся. Если же $2 \leq v_{\max} \leq 4$, то имеем $\beta^* = \arcsin(v_{\max}/2 - 1)$. Подставив $T = T_* \equiv 0$ и $\beta = \beta^*$ в (4.1.18), получим равенство. Следовательно, минимум $J(T) \operatorname{cosec} \beta$ достигается при обтекании круга с теоретическим углом атаки $\beta = \beta^*$. Соответствующее значение приведенной циркуляции даст оценку снизу искомой величины Υ^* .

Далее, как и в задаче о квазирешениях (см. разд. 2.2) множество $K = \tilde{K}_0 \cup \tilde{K}_1$ — выпуклое и замкнутое, но не всегда непустое. Для него справедливо утверждение леммы 2.1, гарантирующее непустоту множества K при $v_{\max} \geq v^*$. Так как $v^*(\beta) > 1$ при $\beta > 0$ и $v^*(0) = 1$, при любом значении $v_{\max} > 1$ найдутся значения теоретического угла атаки β , обеспечивающие непустоту множества управляющих функций. Перечисленные свойства множества K , а также строгая выпуклость по T функционала $J(T) \operatorname{cosec} \beta$, его непрерывность по T и по β и монотонность по β обеспечивают разрешимость задачи A .

Обозначим $\eta = v_{\max}/2 - 1$, $\mu = \min\{1, \ln v_{\max}\}$ и сформулируем полученный результат.

Теорема 4.4. При $v_{\max} > 1$ задача A безусловно разрешима, причем $\sin \beta^* \leq \ln v_{\max}$ и $C_y^* \leq 8 \ln v_{\max}$.

Если $v_{\max} \geq 4$, то единственной экстремалью является функция $T_*(\gamma) \equiv 0$, ей соответствует обтекание круга с совпадением точек разветвления и схода потока, $C_y^* = 8$ и $\beta^* = \pi/2$; при $1 < v_{\max} < 2$ экстремаль отлична от круга. Кроме того, при $2 \leq v_{\max} < 4$ имеем

$$8\eta \leq C_y^* \leq 8\mu, \quad \arcsin \eta \leq \beta^* \leq \arcsin \mu.$$

Отметим, что открытым остался вопрос о достижимости оценок в теореме 4.4 и единственности экстремалей. По-видимому, построить эти экстремали можно только численно, применив какой-либо из известных способов минимизации функционала $J(T) \cos \beta$ при линейных ограничениях (4.1.3), (4.1.4) и нелинейном ограничении

$$\max_{\gamma \in [0, 2\pi]} \{T(\gamma) + \ln [2 |\sin \gamma + \sin \beta|]\} \leq \ln v_{\max}.$$

Итак, как и в классических изопериметрических задачах, в основной вариационной ОКЗА при $v_{\max} \geq 4$ экстремалью является круг. Хотя такая оптимальная форма далека от требований, предъявляемых практикой авиастроения, решение в виде круга получается аналитически, при минимальных ограничениях, диктуемых математической моделью течения, и, следовательно, дает точную оценку сверху для коэффициента подъемной силы, достижимую в случае течения ИНЖ.

Зафиксируем теперь величину $\beta = \beta^* > 0$ и рассмотрим соответствующую задачу максимизации коэффициента подъемной силы крылового профиля, используя $P(\gamma)$ в качестве управляющей функции. Это будет частный случай задачи A , когда величина β заранее зафиксирована (назовем его задачей A').

Задача A' . Требуется определить 2π -периодическую функцию $P(\gamma)$, удовлетворяющую условиям (4.1.3), (4.1.4) при фиксированном значении $\beta = \beta^*$ и доставляющую минимум функционалу (4.1.2).

В силу записанных ограничений эта задача равносильна следующей: при фиксированных $\beta = \beta^* > 0$ и v_{\max} минимизировать на множестве $K = K_0 \cap K_1$ (см. (4.1.15), (4.1.16)) функционал $J(T)$.

Теорема 4.5. Пусть $v_{\max}^* = \max\{v^*, \exp \sin \beta^*\}$, $v_{\max}^{**} = 2(1 + \sin \beta^*)$. Необходимое условие разрешимости задачи A' имеет вид

$$v_{\max} \geq v_{\max}^*. \quad (4.1.20)$$

При этом если $v_{\max} > v_{\max}^{**}$, то единственной экстремалью является круг, а при $v_{\max}^* \leq v_{\max} \leq v_{\max}^{**}$ единственная экстремаль отлична от круга.

Доказательство. В случае непустоты множества K существование и единственность решения задачи A' являются следствием строгой выпуклости функционала $J(T)$ и выпуклости и замкнутости множества K . Непустота последнего обеспечивается условием (4.1.20).

Минимум рассматриваемого функционала на множестве, определенном ограничением (4.1.3), достигается при $T \equiv 0$, а неравенство (4.1.4) выполнится автоматически, если

$$v_{\max} \geq 2(1 + \sin \beta^*). \quad (4.1.21)$$

Таким образом, если заданные параметры v_{\max} и β^* связаны неравенством (4.1.21), оптимальным решением будет круг, а $C_y^* = 8 \sin \beta^*$.

Если же $v_{\max}^* < v_{\max} < 2(1 + \sin \beta^*)$, то, как и в задаче A , можно показать, что экстремаль будет отлична от круга, а $C_y^* < 8 \sin \beta$. Для этого достаточно подставить $T \equiv 0$ в (4.1.14) и получить неравенство $2(1 + \sin \beta^*) \leq v_{\max}$, противоречащее предположению.

В силу теоремы 4.5 при фиксированном значении $\beta = \beta^*$ задача A' будет иметь единственную некруговую экстремаль лишь в случае $v_{\max}^* \leq v_{\max} \leq v_{\max}^{**}$ (при $v_{\max} > v_{\max}^{**}$ экстремалью будет круг), или, по-другому, при заданной величине v_{\max} из интервала $[v_{\max}^*, v_{\max}^{**}]$ параметр β может быть зафиксирован так, чтобы выполнялись неравенства

$$\beta_{\min} \leq \beta \leq \beta_{\max},$$

$$\beta_{\max} = \arcsin \ln v_{\max}, \quad \beta_{\min} = \arcsin(\max\{1 - v_{\max}/2, 0\}).$$

Таким образом, существует допустимая область изменения параметров задачи, соответствующая некруговым экстремальям (заштрихованная область на рис. 4.2 для случая $\varepsilon = 2$), которая ограничена сверху и снизу соответственно кривыми

$$v_{\max} = 2(1 + \sin \beta) \quad \text{и} \quad v_{\max} = \max\{v^*, \exp \sin \beta\}.$$

Как отмечено в разд. 3.3, величина v^* непрерывно зависит от β ; вид этой зависимости установлен в результате вычислительных экспериментов и изображен для случая $\varepsilon = 2$ на рис. 3.1. Таким образом, допустимая область изменения параметров имеет верхнюю границу,

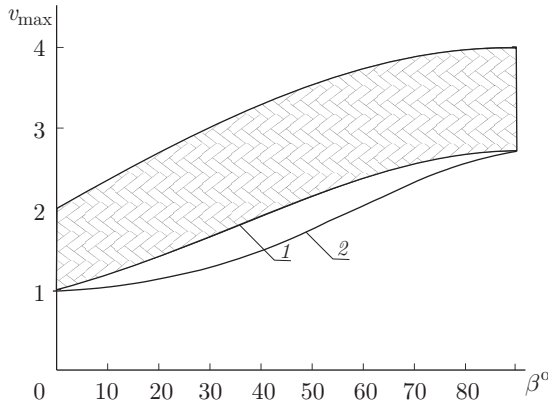


Рис. 4.2. Допустимая и недопустимая области изменения параметров β и v_{\max}

определяемую аналитически, и нижнюю границу, описанную лишь в результате вычислительных экспериментов. Если точка с координатами (β, v_{\max}) попадает в эту область, то существует единственный оптимальный профиль, отличный от круга. Если указанная точка лежит выше обозначенной области, то решением вариационной задачи будет круг, а если ниже, то решение задачи A' не существует.

Теперь можем вернуться к вопросу о сопоставлении кривых с уравнениями $v_{\max} = \exp \sin \beta$ и $v_{\max} = v^*(\beta)$. Области допустимых значений параметров v_{\max} и β , нижняя граница которых определена из условия $v_{\max}^* = \max\{v^*, \exp \sin \beta^*\}$, изображена на рис. 4.2. Здесь линия 1 соответствует случаю $\varepsilon = 2$, а линия 2 — случаю $\varepsilon = 1$. В результате вычислительных экспериментов установлен удивительный факт: при $\varepsilon = 2$ и всех $\beta \in [0, \pi/2]$ имеет место оценка $\exp \sin \beta \geq v^*$, причем величина $(\exp \sin \beta - v^*)/v^*$ не превосходит 0,1. Тем самым экспериментально установлено, что зависимость $v^* = v^*(\beta)$ с высокой точностью аппроксимируется функцией $v^* = \exp \sin \beta$. В случае же $\varepsilon = 1$ линия $v_{\max} = v^*(\beta)$ лежит существенно ниже линии 1, поэтому допустимая область изменения параметров остается прежней. Для всех остальных $\varepsilon \in (1, 2)$ соответствующие линии занимают промежуточное положение между линиями 1 и 2.

4.1.4. Эквивалентная задача. При исследовании задачи минимизации функционала $I_0(P)$ на множестве K удобно преобразовать ее в эквивалентную задачу относительно функции $P_0(\gamma) = H(\gamma) - P(\gamma)$. Ограничения на $P_0(\gamma)$ примут вид $P_0(\gamma) \in \tilde{K}_0 \cap \tilde{K}_1$, где

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1 &= \{P(\gamma) \in L_2[0, 2\pi] : P(\gamma) \geq 0 \text{ для почти всех } \gamma \in [0, 2\pi]\}, \\ \tilde{K}_0 &= \left\{ P(\gamma) \in L_2[0, 2\pi] : \int_0^{2\pi} P(\gamma) d\gamma = \tilde{B}_0, \int_0^{2\pi} P(\gamma) \cos \gamma d\gamma = \tilde{B}_1, \right. \\ &\quad \left. \int_0^{2\pi} P(\gamma) \sin \gamma d\gamma = \tilde{B}_2 \right\}, \\ \tilde{B}_0 &= \int_0^{2\pi} H(\gamma) d\gamma = 2\pi \ln v_{\max}; \quad \tilde{B}_1 = \int_0^{2\pi} H(\gamma) \cos \gamma d\gamma - B_1 = 0; \\ \tilde{B}_2 &= \int_0^{2\pi} H(\gamma) \sin \gamma d\gamma - B_2 = -2\pi \sin \beta. \end{aligned}$$

Для множества $\tilde{K}_0 \cap \tilde{K}_1$ справедливы утверждения леммы 2.1, в частности, $\tilde{K}_0 \cap \tilde{K}_1 \neq \emptyset$ при $v_{\max} > v^*$ и $\tilde{K}_0 \cap \tilde{K}_1 = \emptyset$ при $v_{\max} < v^*$. В свою очередь функционал $I_0(P)$ преобразуется к виду

$$I_0(P_0) = \int_0^{2\pi} \exp[P_0(\gamma)] \vartheta(\gamma) d\gamma, \quad \vartheta(\gamma) = \left| \cos \frac{\gamma - \beta}{2} \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|.$$

Далее опускаем индекс 0 у функции P . Определим на $L_2[0, 2\pi]$ функционал

$$G_1(P) = \left\{ \int_0^{2\pi} \vartheta(\gamma) \exp[P(\gamma)] d\gamma, \text{ если } \vartheta(\gamma) \exp[P(\gamma)] \in L_1[0, 2\pi]; \right. \\ \left. \text{иначе } = +\infty \right\}. \quad (4.1.22)$$

Из результатов [99] следует теорема 4.6.

Теорема 4.6. *Функционал $G_1(P)$, определенный равенством (4.1.22), является собственным, выпуклым и полунепрерывным снизу.*

Ясно, что на своей эффективной области

$$D(G_1) = \{P \in L_2[0, 2\pi] : G_1(P) < \infty\}$$

функционал $G_1(P)$ строго выпуклый. Теперь для доказательства однозначной разрешимости задачи

$$P^* = \underset{P \in \widetilde{K}_0 \cap \widetilde{K}_1}{\operatorname{argmin}} G_1(P) \quad (4.1.23)$$

остается доказать коэрцитивность функционала $G_1(P)$.

Заметим, что весовая функция $\vartheta(\gamma)$ неотрицательна и имеет нули первого порядка — при $\gamma + \beta = 2k\pi$ и $\gamma - \beta = (2k + 1)\pi$. Отсюда следует сходимость интеграла $\int_0^{2\pi} [\vartheta(\gamma)]^{-q} d\gamma$ при $q < 1$.

Пусть $P(\gamma) \in L_2[0, 2\pi]$ и $[P(\gamma)]^{2r} \vartheta(\gamma) \in L_1[0, 2\pi]$ для некоторого $r > 2$. Применив неравенство Гёльдера, получим

$$\int_0^{2\pi} [P(\gamma)]^2 d\gamma \leq \left(\int_0^{2\pi} [P(\gamma)]^{2r} \vartheta(\gamma) d\gamma \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^{2\pi} [\vartheta(\gamma)]^{-1/(r-1)} d\gamma \right)^{\frac{r}{r-1}} \leq \\ \leq c_1 \left(\int_0^{2\pi} [P(\gamma)]^{2r} \vartheta(\gamma) d\gamma \right)^{\frac{1}{r}}, \quad c_1 = \text{const}.$$

С другой стороны, если $P \in D(G_1) \cap \widetilde{K}_1$, то

$$\int_0^{2\pi} \exp[P_0(\gamma)] \vartheta(\gamma) d\gamma \geq c_2 \int_0^{2\pi} [P(\gamma)]^{2r} \vartheta(\gamma) d\gamma, \quad c_2 = \text{const} > 0,$$

поэтому существует такая постоянная c_0 , что

$$\int_0^{2\pi} \exp[P(\gamma)] \vartheta(\gamma) d\gamma \geq c_0 \|P\|_{L_2}^{2r}, \quad r > 2. \quad (4.1.24)$$

Неравенство (4.1.24) очевидным образом влечет за собой коэрцитивность $G_1(P)$: если $\{P_n\} \in D(G_1) \cap \tilde{K}_1$ и $\|P_n\|_{L_2} \rightarrow \infty$, то $G_1(P_n) \rightarrow +\infty$.

Установленные свойства функционала $G_1(P)$ и лемма 2.2 позволяют доказать справедливость следующего утверждения.

Теорема 4.7. *При $v_{\max} > v^*$ задача (4.1.23) имеет единственное решение P^* , а при $v_{\max} < v^*$ она неразрешима.*

4.1.5. Конечномерная аппроксимация и функция Лагранжа.

Перейдем к построению конечномерной аппроксимации задачи (4.1.23). Пусть пространство V_h определено, как и в п. 2.2.2, $\tilde{K}_{1,h} = \tilde{K}_1 \cap V_h$, а множество $K_{0,h}$ определено следующим образом:

$$\tilde{K}_{0,h} = \left\{ P_h \in V_h : \int_0^{2\pi} P_h(\gamma) d\gamma = \tilde{B}_{0,h}, \quad \int_0^{2\pi} P_h(\gamma) \cos \gamma d\gamma = \tilde{B}_{1,h}, \right. \\ \left. \int_0^{2\pi} P_h(\gamma) \sin \gamma d\gamma = \tilde{B}_{2,h} \right\},$$

где

$$\tilde{B}_{0,h} = \int_0^{2\pi} H_h(\gamma) d\gamma, \quad \tilde{B}_{1,h} = \int_0^{2\pi} H_h(\gamma) \cos \gamma d\gamma - B_1, \\ \tilde{B}_{2,h} = \int_0^{2\pi} H_h(\gamma) \sin \gamma d\gamma - B_2.$$

В данном случае

$$\tilde{K}_{1,h} = \{P \in V_h : P_i \geq 0 \text{ для всех } i = 1, \dots, N\},$$

а множество $\tilde{K}_{0,h}$ снова имеет вид $\tilde{K}_{0,h} = \{P : BP = \tilde{b}\}$ с вектором $\tilde{b} = (\tilde{B}_{0,h}, \tilde{B}_{1,h}, \tilde{B}_{2,h})^T$ и матрицей B , определенной выше.

Для множества $\tilde{K}_h = \tilde{K}_{0,h} \cap \tilde{K}_{1,h}$ справедлив аналог леммы 2.1, так как по построению

$$P_h \in \tilde{K}_{0,h} \Leftrightarrow H_h - P_h \in K_{0,h}, \quad P_h \in \tilde{K}_{1,h} \Leftrightarrow H_h - P_h \in K_{1,h}$$

с множествами $K_{0,h}$ и $K_{1,h}$, определенными в задаче (2.2.4).

Рассмотрим конечномерную аппроксимацию задачи (4.1.23):

$$P_h = \operatorname{argmin}_{Q_h \in \tilde{K}_h} \left\{ G_{1,h}(Q_h) = \int_0^{2\pi} \vartheta_h(\gamma) \exp[Q_h(\gamma)] d\gamma \right\}, \quad (4.1.25)$$

где ϑ_h — V_h -аппроксимация ϑ , построенная аналогично тому, как это было сделано для функции H . Функционал $G_{1,h}(p)$ выпуклый,

непрерывный и коэрцитивный на \tilde{K}_h . Вместе с леммой 2.2 это дает следующий результат.

Теорема 4.8. *При $v_{\max} > v_h^*$ задача (4.1.25) имеет единственное решение, а при $v_{\max} < v_h^*$ она неразрешима.*

Поскольку функция $\langle \vartheta \exp P, 1 \rangle$ выпукла и непрерывно дифференцируема по P , а все ограничения линейны, из [14] выведем следующий аналог теоремы 2.4.

Теорема 4.9. *Пусть P — решение задачи (4.1.25). Тогда существует вектор $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^3$ такой, что*

$$\begin{cases} \vartheta \exp P - \lambda - B^T \mu = 0, \\ BP - \tilde{b} = 0, \\ P \gg 0, \langle P, \lambda \rangle = 0. \end{cases} \quad (4.1.26)$$

Обратно, если вектор $(P, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}^3$ удовлетворяет соотношениям (4.1.26), то P — решение задачи (4.1.25).

Возьмем функцию Лагранжа для задачи (4.1.25) в виде

$$L_{1,h}(P_h, \lambda_h) = G_{1,h}(P_h) - \int_0^{2\pi} \lambda_h P_h d\gamma, \quad (4.1.27)$$

т. е. снова снимем с помощью множителей Лагранжа ограничения-неравенства.

Теорема 4.10. *Пусть выполнено условие $v_{\max} > v_h^*$. Тогда $P_h \in \tilde{K}_{0,h}$ является решением задачи (4.1.25) в том и только том случае, когда существует функция λ_h такая, что $(P_h, \lambda_h) \in \tilde{K}_{0,h} \times V_h^+$ есть седловая точка функции $L_{1,h}$.*

Доказательство. Ясно, что функция Лагранжа $L_{1,h}(P_h, \lambda_h)$ выпукла и непрерывна по P_h и аффинна по λ_h . Кроме того, выполнено условие Слейтера. Осталось доказать, что $L_{1,h}(P_h^n, 0) \rightarrow +\infty$ при $P_h^n \in \tilde{K}_{0,h}$, $\|P_h^n\| \rightarrow \infty$.

Зафиксируем элемент $P_{0,h} \in \tilde{K}_{0,h}$, тогда $Q_h^n = P_h^n - P_{0,h}$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} Q_h^n d\gamma = 0 \quad (4.1.28)$$

и $\|Q_h^n\| \rightarrow \infty$. В силу конечномерности пространства V_h имеем $\int_0^{2\pi} |Q_h^n| d\gamma \rightarrow +\infty$, а условие (4.1.28) обеспечивает выполнение соотно-

шения $\int_0^{2\pi} (Q_h^n)^+ d\gamma \rightarrow +\infty$. Отметим, что по построению $\vartheta_h(\gamma) \geq \vartheta_0 > 0$

при всех $\gamma \in [0, 2\pi]$, откуда следует

$$\vartheta_h(\gamma) \exp(P_{0,h}) \geq \alpha_0 > 0 \quad \text{для всех } \gamma \in [0, 2\pi].$$

Теперь нетрудно провести следующие оценки:

$$\begin{aligned} L_{1,h}(P_h^n, 0) &= G_{1,h}(P_h^n) \geq \alpha_0 \int_0^{2\pi} \exp(Q_h^n) d\gamma \geq \\ &\geq \alpha_0 \left(\int_0^{2\pi} \exp(Q_h^n)^+ d\gamma - 2\pi \right) \geq \alpha_0 \left(\int_0^{2\pi} (Q_h^n)^+ d\gamma - 2\pi \right), \end{aligned}$$

поэтому $L_{1,h}(P_h^n, 0) \rightarrow +\infty$. Теорема доказана.

Замечание. Как и в разд. 3.1 (см. замечание 3.1) можно построить функцию Лагранжа, снимая все ограничения. Для векторов узловых параметров функций из V_h в данном случае она имеет вид

$$\mathcal{L}_1(p, \lambda, \mu) = \langle \vartheta e^p, 1 \rangle - \langle \lambda, P \rangle - \sum_{i=1}^3 \mu_i (BP - b)_i. \quad (4.1.29)$$

В (4.1.29) под ϑ понимается диагональная матрица $\vartheta = \text{diag}(\vartheta_1, \dots, \vartheta_N)$, а под $\exp P = \text{diag}(\exp P_1, \dots, \exp P_N)$ — диагональный оператор в \mathbb{R}^N .

4.1.6. Обтекание с точкой разветвления потока внутри области течения. Остановимся теперь на решении задач B , A и A' в случае, когда поток ИНЖ обтекает искомый контур с образованием точки разветвления потока внутри области течения. В этой ситуации имеем (см., например, [67])

$$\begin{aligned} \beta &= 0, \quad \Gamma > 4\pi u, \quad \frac{dw}{d\zeta} = \frac{u(\zeta + ir)(\zeta + i/r)}{\zeta^2}, \\ U(\gamma) &= uh(\gamma, r), \quad h(\gamma, r) = \frac{(r^2 + 2r \sin \gamma + 1)}{r}, \end{aligned}$$

где $\zeta_* = -ir$ — прообраз точки разветвления потока, $r > 1$ — параметр. Следовательно, опять имеем один оптимизационный параметр r .

Аналогом формулы (1.4.3) служит равенство

$$\Gamma = \frac{2\pi u(r^2 + 1)}{r}. \quad (4.1.30)$$

Из равенства $u = Lv_\infty/I_0(P)$ и (4.1.30) теперь находим, что для максимизации Γ нужно минимизировать функционал

$$I_1(P, r) = \frac{rI_0(P)}{r^2 + 1}$$

при $r > 1$ и ограничениях (4.1.3) и (4.1.4) на управляющую функцию $P(\gamma)$. Из теоремы 4.1 следует, что $I_1(P, r) \geq 2\pi r/(r^2 + 1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Следовательно, верхняя грань Γ не ограничена и достигается при увеличении r в случае обтекания любого контура. Поэтому задача B в данной ситуации теряет смысл.

Перейдем к задаче А. Аналогом условия (4.1.14) здесь служит неравенство

$$f_r(\gamma) \equiv -T(\gamma) + \ln(r^2 + 2r \sin \gamma + 1) - 2 \ln r \leq \ln \frac{v_{\max}}{r},$$

$$\gamma \in [0, 2\pi]. \quad (4.1.31)$$

Очевидно, что $f_r(\gamma) = \operatorname{Re} F_r(e^{i\gamma})$, где

$$F_r(\zeta) = -\chi(\zeta) + 2 \ln \left(1 + \frac{i}{r\zeta} \right) = \frac{2i}{r\zeta} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \zeta^{-k}, \quad |\zeta| > 1,$$

и функция $F_r(\zeta) \in \mathbf{F}(\mathbf{a})$ при $a = 2i/r$. В силу леммы 4.1 имеем $\sup_{\gamma \in [0, 2\pi]} f_r(\gamma) > 1/r$. Значит, для выполнения (4.1.31) необходимо, чтобы $g(r) \equiv 1/r + \ln r \leq \ln v_{\max}$. Последнее неравенство возможно только при $v_* > e$. Покажем, что в этом случае $r \leq r_*$, где r_* — единственный корень уравнения

$$r \ln \frac{v_{\max}}{r} = 1.$$

Действительно, пусть неравенство (4.1.31) выполнено для некоторой функции $T = T_1(\gamma)$ при $r = r_1 > r_*$. В силу строгой монотонности функции $g(r)$ имеем

$$\sup_{\gamma \in [0, 2\pi]} f_{r_1}(\gamma) + \ln \frac{r_1}{v_{\max}} > g(r_1) > g(r_*) = 0,$$

где

$$f_{r_1}(\gamma) = T_1(\gamma) + \ln \frac{r_1^2 + 2r_1 \sin \gamma + 1}{r_1^2},$$

и, следовательно, ограничение (4.1.31) нарушено. Значит, $r \leq r_*$. Глобальный минимум функционала $J(T)$ известен — $J(T_*) = 2\pi$. Подставив экстремальную функцию $T_* \equiv 0$ в (4.1.31), получим неравенство $rv_{\max} \geq r^2 + 2r + 1$, которое возможно лишь при $v_{\max} \geq 4$ и означает, что при $e < v_{\max} < 4$ окружность не будет экстремалью. Из знакопеременности $T(\gamma)$ и (4.1.31) следует, что

$$r \leq r_0 = \frac{v_{\max} + 2 + \sqrt{v_{\max}^2 + 4v_{\max}}}{2} < r_*. \quad (4.1.32)$$

Сузив множество допустимых функций $T(\gamma)$ и значений параметра r в результате замены условия (4.1.31) на $T(\gamma) + 2 \ln(r + 1) \leq \ln(rv_{\max})$, получим при $v_{\max} \geq 4$ в качестве необходимого условия разрешимости неравенство (4.1.32) и, как следствие, оценку

$$r \leq r_1 = \frac{v_{\max} - 2 + \sqrt{v_{\max}^2 - 4v_{\max}}}{2} < r_0, \quad (4.1.33)$$

которая позволит записать оценку снизу для искомой величины Υ^* .

Аналог задачи A' заключается в фиксации величины r . Из предыдущих построений следуют выводы о разрешимости этой задачи. Сформулируем окончательный результат.

Теорема 4.11. *Для схемы обтекания контуров класса \mathbf{L} потоком ИНЖ с образованием точки разветвления потока в области течения:*

1) *решение задачи A существует только при $v_{\max} > e$, причем $\Upsilon^* \leq r_* + r_*^{-1}$, а при $e < v_{\max} < 4$ экстремаль не является окружностью;*

2) *необходимым условием разрешимости задачи A' служат неравенства $1 < r \leq r_*$ и $v_{\max} > e$, решение единственно и при $1 < r \leq r_1$, $v_* > 4$ является окружностью, $\Upsilon^* = r + r^{-1}$; при $r_1 < r \leq r_*$ экстремаль отлична от окружности и $\Upsilon^* \leq r + r^{-1}$.*

Здесь величины r_0 и r_1 определены формулами (4.1.32) и (4.1.33).

4.2. Численная оптимизация

4.2.1. Итерационные алгоритмы. Используя приведенные выше результаты, можно предложить различные итерационные методы решения задачи (4.1.23) и ее конечномерной аппроксимации, основанные как на прямых, так и на двойственных постановках.

Сначала построим и исследуем метод Удзавы для задачи (4.1.25). Вместо функции Лагранжа

$$L_{1,h}(P_h, \lambda_h) = G_{1,h}(P_h) - \int_0^{2\pi} \lambda_h P_h d\gamma$$

используем модифицированную функцию ($r = \text{const} > 0$)

$$\mathcal{L}_{1,h}(P_h, \lambda_h) = G_{1,h}(P_h) + r \int_0^{2\pi} (P_h^-)^2 d\gamma - \int_0^{2\pi} \lambda_h P_h d\gamma. \quad (4.2.1)$$

Функция $\mathcal{L}_{1,h}$ имеет те же седловые точки, что и $L_{1,h}$, при этом функция

$$G_r(P_h) = G_{1,h}(P_h) + \int_0^{2\pi} (P_h^-)^2 d\gamma$$

коэрцитивна на всем пространстве V_h и ее градиент равномерно монотонный:

$$(G'_r(P_h) - J'_r(Q_h), P_h - Q_h) \geq \min\{\vartheta_0, r\} \|P_h - Q_h\|^2 \quad \forall P_h, Q_h \in V_h.$$

В силу этих свойств алгоритм Удзавы

$$\begin{cases} \lambda_h^0 \in V_h^+; & \lambda_h^{n+1} = \text{Pr}_{V_h^+} \{\lambda_h^n - \rho_n P_h^n\}, \\ P_h^n = \underset{P_h \in \widetilde{K}_{0,h}}{\text{argmin}} \mathcal{L}(P_h, \lambda_h^n) \end{cases} \quad (4.2.2)$$

сходится при следующем выборе итерационных параметров: $\rho_n \in (\nu, \min\{\vartheta_0, r\} - \nu)$; $\nu > 0$. При реализации (4.2.2) решение задачи

$$P_h^n = \operatorname{argmin}_{P_h \in \widetilde{K}_{0,h}} \mathcal{L}(P_h, \lambda_h^n)$$

сводится к минимизации выпуклой дифференцируемой функции

$$\mathcal{G}(P) = \sum_{i=1}^N [\vartheta_i \exp(P_i) + r(P_i^+)^2 - \lambda_i^n P_i] \quad (4.2.3)$$

на аффинном множестве $BP = \widetilde{b}$. Задачу (4.2.3) можно решать различными известными методами дифференцируемой оптимизации. В том числе, можно в очередной раз использовать методы двойственности, отыскивая седловую точку на $V_h \times \mathbb{R}^3$ функции Лагранжа

$$\mathcal{G}(P) + \sum_{i=1}^3 \mu_i (BP - \widetilde{b})_i.$$

Теперь применим к задаче (4.1.25) итерационный метод расщепления. Запишем эту задачу в виде включения

$$Tp_h \equiv \vartheta_h \exp P_h + \partial I_{\widetilde{K}_h}(P_h) \ni 0, \quad (4.2.4)$$

и пусть

$$SP_h = \vartheta_h \exp P_h + \partial I_{\widetilde{K}_{1,h}}(P_h),$$

$R = \partial I_{\widetilde{K}_{0,h}}$. Как и в разд. 3.2, убедимся в том, что $\operatorname{int} D(S) \cap D(R) \neq \emptyset$, поэтому $T = R + S$.

Итерационный метод типа Дугласа–Рэкфорда для уравнения (4.2.4) имеет вид (3.2.10) и сходится.

Остановимся на вопросе реализации алгоритма (3.2.10). Ясно, что решение уравнения $y_h = J_R^r x_h$ снова сводится к задаче квадратичного программирования с ограничениями вида $BP = \widetilde{b}$, решение которой выписывается в явном виде (ср. с (3.1.8)). Что касается уравнения $y_h = J_S^r x_h$, то оно эквивалентно вариационному неравенству

$$y_h \geq 0: (y_h + r e^{y_h} \vartheta_h - x_h, z_h - y_h) \geq 0 \quad \forall z_h \geq 0,$$

которое расщепляется на N независимых одномерных задач относительно узловых параметров y_i функции y_h :

$$y_i \geq 0, y_i + r e^{y_i} \vartheta_i - x_i \geq 0, y_i(y_i + r e^{y_i} \vartheta_i - x_i) = 0. \quad (4.2.5)$$

Задача (4.2.5) решается следующим образом. Если $r \vartheta_i > x_i$, то $y_i = 0$; иначе $y_i > 0$ является решением скалярного уравнения $y_i + r e^{y_i} \vartheta_i = x_i$ со строго монотонной дифференцируемой функцией $y_i + r e^{y_i}$, и можно применить, например, метод Ньютона.

В проведенных вычислительных экспериментах задача (4.1.25) решалась методом расщепления с постоянным итерационным па-

раметром. В качестве входных параметров задачи выбирались $\beta = 0,2$, два значения параметра $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = 2$ и разные значения v_{\max} . Критерием остановки итераций было условие $\sum_{i=1}^{n-1} |P_i^{k+1} - P_i^k|^2 \leq 10^{-6}$. Оптимальное значение итерационного параметра метода определялось экспериментально.

При $\varepsilon = 1$ численные решения были сравнены с точными решениями (см. ниже) и во всех случаях практически совпали с ними.

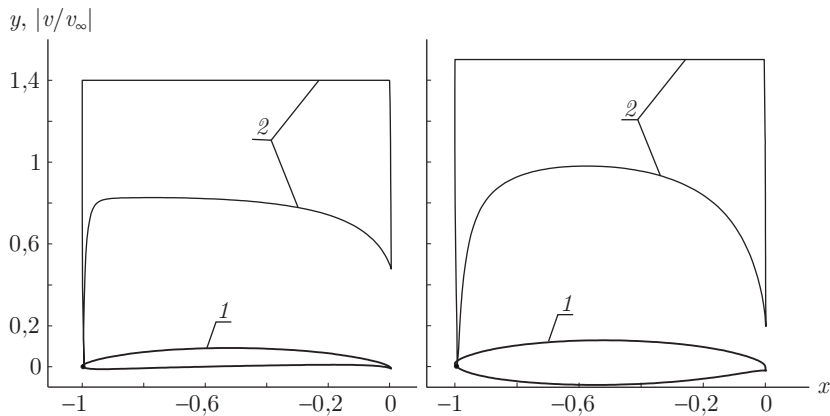


Рис. 4.3. Численная оптимизация профиля с острой задней кромкой, $\varepsilon = 2$, $\beta = 0,2$, $v_{\max} = 1,4; 1,5$

Результаты расчетов для $\varepsilon = 2$ (в этом случае точные решения неизвестны) показали, что для $v_{\max} = 4$ распределение скорости автоматически удовлетворяет ограничению на максимум скорости и профиль получается близким к кругу. В случае $v_{\max} < 4$ график распределения скорости имеет горизонтальную полку (снова достигается краевой экстремум в силу наложенного ограничения на максимум скорости). При уменьшении v_{\max} полка опускается еще ниже в соответствии с заданным ограничением на максимум скорости, а профили становятся тоньше. Два профиля (контуры 1) при $\beta = 0,2$, $v_{\max} = 1,5$ и $v_{\max} = 1,4$ представлены на рис. 4.3 (линии 2 — соответствующие им полочные распределения скорости).

4.2.2. Уравнения Куна–Таккера и алгоритм SQP. В стандартных задачах нелинейного программирования (оптимизации с ограничениями) $\min f(x) \rightarrow \min$ при условиях

$$h(x) = 0, \quad g(x) \leq 0,$$

где $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_e}$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m-m_e}$ — заданные (возможно, нелинейные) функции (составляющие вектор-функций h и g обозначим соответственно h_1, h_2, \dots, h_{m_e} и $g_{m_e+1}, g_{m_e+2}, \dots, g_m$), m_e — число

ограничений типа равенства, x — n -мерный вектор параметров оптимизации, обычный подход к нахождению решения состоит в замене исходной задачи с ограничениями задачей без ограничений (безусловной оптимизации), например, с помощью метода штрафных функций (см., например, [13, 59]). Другой подход состоит в применении так называемых уравнений Куна–Таккера, которые в предположении дифференцируемости функций $f(x)$, $h_1(x)$, $h_2(x)$, ..., $h_{m_e}(x)$ и $g_{m_e+1}(x)$, $g_{m_e+2}(x)$, ..., $g_m(x)$ записываются в виде

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m_e} \lambda_i \nabla h_i(x) + \sum_{i=m_e+1}^m \mu_i \nabla g_i(x) &= 0, \\ h_i(x) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_e; \quad \sum_{i=m_e+1}^m \mu_i g_i(x) = 0, \end{aligned}$$

где x — точка из допустимого множества ($g_i(x) \leq 0$ для всех $i = m_e + 1, \dots, m$), λ_i , μ_i — множители Лагранжа, $\mu = (\mu_{m_e+1}, \dots, \mu_m) \geq 0$. При некоторых дополнительных предположениях о характере ограничений в приведенной выше задаче параметрической оптимизации и гладкости функций $f(x)$, $h(x)$ и $g(x)$ решение уравнений Куна–Таккера однозначно определяет искомый оптимум $x = x^*$.

Для решения записанных уравнений использовался алгоритм SQP (Sequential Quadratic Programming [127]) так называемого последовательного квадратичного программирования, представляющий собой разновидность квазиньютоновского метода. Основная идея алгоритма SQP заключается в таком применении квадратичной аппроксимации функции Лагранжа (учитывающей ограничения)

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m_e} \lambda_i h_i(x) + \sum_{i=m_e+1}^m \mu_i g_i(x),$$

что на каждой итерации решается задача оптимизации

$$\begin{aligned} \min_{d \in R^n} \quad & \frac{1}{2} d^T H_k d + \nabla f^T(x_k) d, \\ \nabla h_i^T(x_k) d + h_i(x_k) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_e, \\ \nabla g_i^T(x_k) d + g_i(x_k) &\leq 0, \quad i = m_e + 1, \dots, m, \end{aligned}$$

где H_k — известная симметричная и положительно определенная матрица вторых частных и смешанных производных (гессиан), d — вектор направления спуска. В последней формулировке задача может быть решена любым методом решения задач квадратичного программирования, например, методом проекции градиента.

Много примеров численного решения задачи A' методом SQP для разных β приведено в [41]. Вычислительные эксперименты показали хорошее совпадение численных решений с точными, описанными ниже, а также подтвердили тенденции изменения геометрических и аэродина-

мических характеристик оптимизированных аэродинамических форм, установленные для точных решений и указанные в следующих разделах.

На рис. 4.4 представлены зависимости максимального значения $C_{y \max}$ коэффициента подъемной силы от величины v_{\max} при разных β в диапазоне от 1° до 20° , построенные на основе численных решений задачи A' . Правый конец каждой кривой соответствует точному решению задачи A' при заданном значении β , т.е. кругу. При уменьшении значения v_{\max} величины $C_{y \max}$ уменьшаются, и для каждого β в соответствии с теоремой 4.5 имеется минимальное значение v_{\max}^* максимальной скорости на контуре. Этому значению соответствует левый конец каждой кривой на рис. 4.4. Таким образом, при уменьшении v_{\max} в допустимом интервале его изменения значения $C_{y \max}$ уменьшаются и для каждого β имеется некоторое минимальное значение максимальной скорости на контуре. При этом последнее значение обязательно достигает заданной величины v_{\max} .

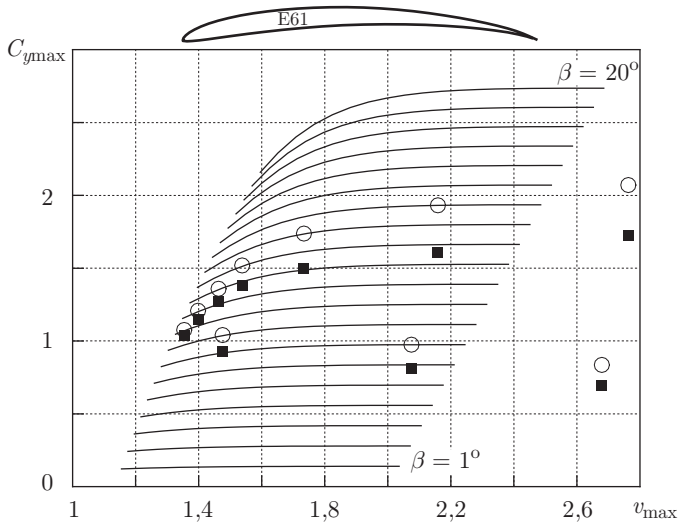


Рис. 4.4. Зависимости $C_{y \max}$ от v_{\max} для разных β и сравнение с характеристиками профиля E-61

Далее, при увеличении значения v_{\max} соответствующим точным решением оптимизационной задачи будет круг, и для каждого фиксированного значения β имеем $C_y = 8 \sin \beta$. Следовательно, представленные графики могут быть продолжены вправо горизонтальными прямыми, каждой точке которых соответствует экстремальное решение в виде круга, распределение скорости на котором задается в виде $v(\gamma) = 2|\sin \gamma + \sin \beta|$ и, следовательно, $\max v(\gamma) = 2(1 + \sin \beta)$. Совпадению этого значения с заданной величиной v_{\max} соответствуют

крайние правые точки на графиках, изображенных на рис. 4.4. При $v_{\max} > 2(1 + \sin \beta)$ ограничение на максимальное значение скорости на контуре будет выполняться автоматически, а заданная величина v_{\max} не будет достигаться.

Приведем теперь результаты сравнения полученных оптимальных профилей с некоторыми известными профилями.

Так, на рис. 4.4 квадратами обозначены значения коэффициента C_y , рассчитанные для профиля Эпплера E-61 (см., например, [110]; этот профиль имеет толщину 6 % и также изображен на рис. 4.4) при некоторых значениях v_{\max} и для тех β , для которых соответствующие максимальные значения $C_{y \max}$ при тех же значениях v_{\max} отмечены кружками на графиках. Пары кружков и квадратов, расположенные правее графиков, соответствуют сравнению профиля E-61 с кругом. Как видим, характеристики профиля E-61 достаточно близки к оптимальным.

Результаты аналогичного сравнения, но для разных шестипроцентных профилей серии НАСА (0006, 2406, 4406, 6406, 8406), представлены в [41]. Они показали, что характеристики профилей этой серии также близки к оптимальным.

Реальные профили имеют обычно заостренную заднюю кромку. На рис. 4.5 и рис. 4.6 представлены результаты численной оптимизации формы контуров профилей (линии 2) с заостренной задней

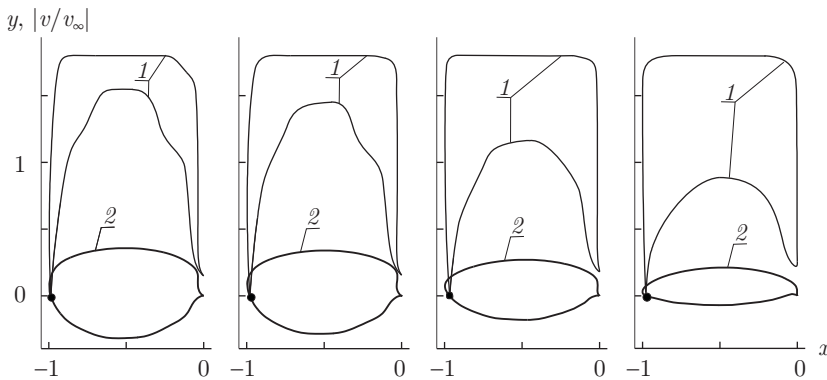


Рис. 4.5. Численная оптимизация профиля с заостренной задней кромкой, $\varepsilon = 2$, $N = 9$, $v_{\max} = 1,8$, $\beta = 8^\circ$; 10° ; 15° ; 20°

кромкой ($\varepsilon = 2$) для достижения максимального C_y при $v_{\max} = 1,8$ и $v_{\max} = 1,4$ соответственно в N -параметрическом семействе функций $P_N(\gamma) = \sum_{k=2}^{N+1} (a_k \cos k\gamma + b_k \sin k\gamma)$ при варьировании коэффициентов a_k , b_k с учетом наложенных ограничений. Отметим, что точное решение для случая $\varepsilon = 2$ неизвестно. Передние критические точки отмечены кружками, задние критические точки совпадают с острыми кромками. Характеристики построенных профилей и расчетные углы

атаки α , приведенные в табл. 4.1, достаточно близки к значениям, полученным при оптимизации профилей с затупленной задней кромкой (см. ниже табл. 4.4).

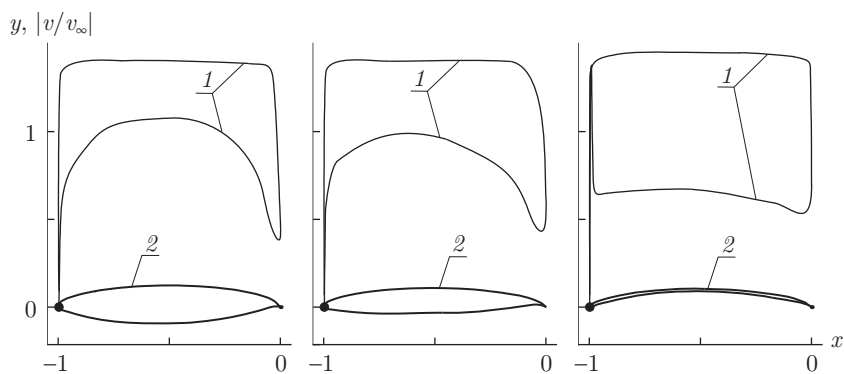


Рис. 4.6. Численная оптимизация профиля с заостренной задней кромкой, $\varepsilon = 2$, $N = 18$, $v_{\max} = 1,4$, $\beta = 8^\circ$; 10° ; 14°

Таблица 4.1

Характеристики численных оптимальных решений для $\varepsilon = 2$ при $v_{\max} = 1,8$; $1,4$ и разных β

$v_{\max} = 1,8$	t_{\max}	C_y	Υ^*	α
$\beta = 8^\circ$	0,6752	1,0874	0,2719	$6,00^\circ$
$\beta = 10^\circ$	0,6231	1,3507	0,3377	$6,36^\circ$
$\beta = 15^\circ$	0,4501	1,9728	0,4932	$6,05^\circ$
$\beta = 20^\circ$	0,2817	2,4882	0,6221	$3,22^\circ$
$v_{\max} = 1,4$	t_{\max}	C_y	Υ^*	α
$\beta = 8^\circ$	0,2120	0,9854	0,2463	$0,662^\circ$
$\beta = 10^\circ$	0,1419	1,189	0,2973	$0,200^\circ$
$\beta = 14^\circ$	0,0413	1,5476	0,3869	$0,00^\circ$

Хордовые диаграммы скорости (линии 1) на верхних поверхностях полученных профилей имеют «полочный» характер, но большие градиенты скорости в окрестности задних кромок свидетельствуют о наличии отрывных зон. Приведенные и другие примеры численной оптимизации профилей с заостренной задней кромкой показали, что рассчитанные градиенты скорости в задней кромке весьма значительны и свидетельствуют о наличии отрыва потока. Поэтому при оптимизации нужно дополнительно учитывать критерий безотрывности. Один из критериев получен в рамках модели пограничного слоя и имеет вид (1.3.3).

На рис. 4.7 представлены примеры оптимальных безотрывных крыловых профилей, рассчитанных для полностью турбулентного ПС по методу Кочина–Лойцянского, их характеристики приведены

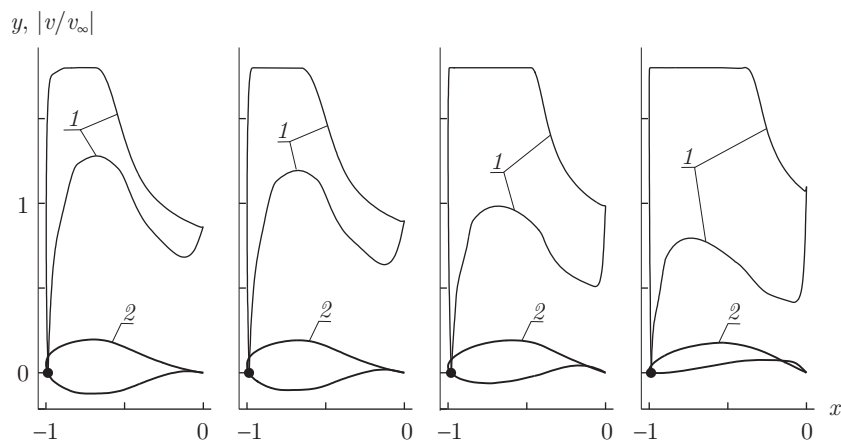


Рис. 4.7. Безотрывные оптимальные профили для $v_{\max} = 1,8$ при $\beta = 8^\circ; 10^\circ; 15^\circ; 20^\circ$

в табл. 4.2. Видно, что для случая $\beta = 20^\circ$ контур оптимального профиля имеет в задней кромке самопересечение. Вычислительные эксперименты показали, что при ослаблении ограничения на максимум скорости (при увеличении значения v_{\max}) удастся избежать неоднозначности области течения для оптимальных профилей.

Таблица 4.2

Характеристики оптимальных безотрывных профилей, построенных численно при $v_{\max} = 1,8$ и разных β

β°	t_{\max}	α	C_y	Υ^*
8	0,3225	3,3392	0,9833	0,2458
10	0,2961	2,8319	1,2172	0,3043
15	0,2562	2,3077	1,7870	0,4467
20	0,1303	1,0411	2,2166	0,5541

На рис. 4.8 изображены профиль НАСА-4406 (сплошной контур) и оптимизированный безотрывный профиль с бесконечно тонкой задней кромкой (штриховой контур), построенный при $\beta = 8^\circ$ и $v_{\max} = 1,76$, а также соответствующие хордовые диаграммы скорости. Профили имеют близкие значения коэффициента подъемной силы (соответственно $C_y = 0,9$ и $C_y = 1,0$), но существенно различаются по форме. Различны и распределения скорости, хотя в обоих случаях, как показали расчеты, проведенные в пакете прикладных программ Fluent, имеет

место безотрывное обтекание. Как видим, учет при оптимизации дополнительного ограничения, связанного с обеспечением безотрывности обтекания, привел к некоторому уменьшению значения коэффициента подъемной силы по сравнению с оптимальным (в данном случае $C_{y \max} = 1,1$).

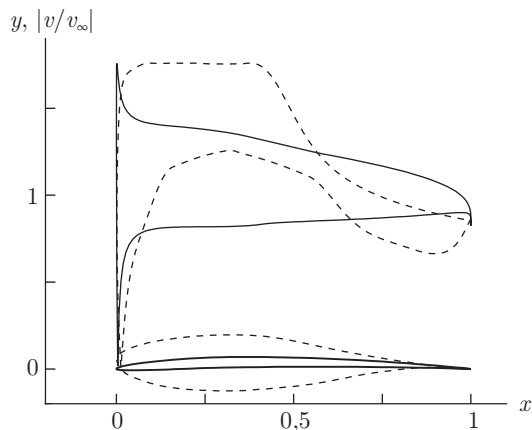


Рис. 4.8. Сравнение оптимального профиля, полученного численным методом, с профилем NACA-4406 при $\beta = 8^\circ$ и $v_{\max} = 1,76$

Приведенные результаты численной оптимизации свидетельствуют о том, что в окрестности точного решения задачи имеются различные приближенные решения (профили как с гладкой, так и с заостренной задней кромкой), доставляющие минимизируемому функционалу значение весьма близкое к экстремальному, но существенно различающиеся по геометрии оптимальных контуров. Все это делает актуальным построение точного решения основной вариационной ОКЗА.

4.3. Точное решение задачи A'

4.3.1. Вид экстремальной функции. Вид экстремальной функции $P^*(\gamma)$ позволяет установить теорема Куна–Таккера (см., например, [58], п. 1.1.2).

Составим расширенный функционал

$$\begin{aligned} \Psi(P) = & \int_0^{2\pi} F(P, \tau) d\tau \equiv I_0(P) + \mu_0[A_0(P) - B_0] + \\ & + \mu_1[A_1(P) - B_1] + \mu_2[A_2(P) - B_2] + \int_0^{2\pi} \mu(\tau)[P(\tau) - H(\tau)] d\tau, \end{aligned}$$

причем параметры μ_0 , μ_1 и μ_2 должны быть выбраны так, чтобы выполнялись условия (4.1.3), а $\mu(\gamma)$ — неотрицательная функция (множитель Куна–Таккера), связанная с обеспечением условия (4.1.4). Вид экстремальной функции $P^*(\gamma)$ в силу необходимого условия экстремума определяется из уравнения $\partial F / \partial P = 0$, принимающего в данном случае вид

$$-e^{-P^*(\gamma)} \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|^{\varepsilon-1} + g(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu; \gamma) = 0,$$

$$g(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu; \gamma) \equiv \mu_0 + \mu_1 \cos \gamma + \mu_2 \sin \gamma + \mu(\gamma),$$

причем параметры μ_0 , μ_1 , μ_2 и функция $\mu(\gamma)$ таковы, что $g(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu; \gamma) \geq 0$. Следовательно,

$$P^*(\gamma) = (\varepsilon - 1) \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right| - \ln g(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu; \gamma). \quad (4.3.1)$$

Неотрицательная функция $\mu(\gamma) \geq 0$ в соответствии с методом Куна–Таккера находится из так называемого условия дополняющей нежесткости

$$\mu(\gamma) [P^*(\gamma) - H(\gamma)] = 0. \quad (4.3.2)$$

Для ее отыскания подставим (4.3.1) в (4.3.2):

$$\mu(\gamma) \ln \frac{M(\gamma, \beta)}{v_{\max} g(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu; \gamma)} = 0.$$

Функцию $\mu^*(\gamma)$, соответствующую искомому точному решению, положим равной нулю, если выражение в квадратных скобках в (4.3.2) меньше нуля, т.е. ограничение типа неравенства в рассматриваемой вариационной задаче выполняется. В противном случае зафиксируем $\mu^*(\gamma)$ таким образом, чтобы выражение в квадратных скобках равнялось нулю:

$$\mu^*(\gamma) = \max \{0, -v_{\max}^{-1} M(\gamma, \beta) - \mu_0 - \mu_1 \cos \gamma - \mu_2 \sin \gamma\}. \quad (4.3.3)$$

Непосредственной подстановкой этого выражения и (4.3.1) в (1.4.19) можно убедиться, что последнее условие выполняется независимо от выбора параметров μ_0 , μ_1 , μ_2 .

Распределение скорости, соответствующее экстремальной функции $P^*(\gamma)$, имеет вид

$$|v^*(\gamma)| = \min \left\{ v_{\max}; \left| \frac{M(\gamma, \beta)}{\omega(\gamma) + \mu_1 \cos \gamma} \right| \right\}, \quad \omega(\gamma) = \mu_0 + \mu_2 \sin \gamma. \quad (4.3.4)$$

Минимальное значение функционала

$$I^* = I_0(P^*) = 2\pi \mu_0 + \int_0^{2\pi} \mu^*(\tau) d\tau > 0. \quad (4.3.5)$$

Условия (4.1.3) для полученной экстремальной функции $P^*(\gamma)$ перепишем в виде

$$\int_0^{2\pi} \ln g(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu^*; \gamma) d\gamma = 0, \quad (4.3.6)$$

$$\int_0^{2\pi} \ln g(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu^*; \gamma) \cos \gamma d\gamma = 0, \quad (4.3.7)$$

$$\int_0^{2\pi} \ln g(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu^*; \gamma) \sin \gamma d\gamma = 0. \quad (4.3.8)$$

Отметим, что величина I^* , функции $\mu^*(\gamma)$, $v^*(\gamma)$ и равенства (4.3.6)–(4.3.8) не содержат величины ε , определяющую угол профиля в задней кромке. Значит, полученная экстремаль одна и та же для профилей с заостренной кромкой ($\varepsilon > 1$) и с затупленной кромкой ($\varepsilon = 1$). Однако, как видно из (4.3.1), в первом случае функция $P^*(\gamma)$ имеет логарифмическую особенность при $\gamma = -\beta$. Следовательно, полученное решение не попадает в заданный класс и дает лишь верхнюю оценку максимума коэффициента подъемной силы. В случае же затупленной кромки ($\varepsilon = 1$) можно построить профиль, для которого этот максимум достигается.

Запишем теперь вид функции $z^*(\zeta) = z_{P^*}(\zeta)$, конформно отображающей внешность единичного круга на область течения вокруг профиля оптимальной формы. Обозначим через $G(\zeta) = (\mathbf{S} \ln g)(\zeta)$ аналитическую в области E^- функцию, вещественная часть которой на окружности $\operatorname{Re} G(e^{i\gamma}) = \ln g(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu^*; \gamma)$, а $\operatorname{Im} G(\infty) = 0$. При заданных коэффициентах μ_0, μ_1, μ_2 и функции $\mu^*(\gamma)$ функция $G(\zeta)$ однозначно определяется оператором Шварца — см. (1.4.6). Теперь в силу (1.4.9), (1.4.13), (4.3.1) и (4.3.5) имеем

$$z^*(\zeta) = 2[I^*]^{-1} \int_{e^{-i\beta}}^{\zeta} \exp G(\zeta) d\zeta. \quad (4.3.9)$$

В частном случае $\mu^*(\gamma) \equiv 0$ (при отсутствии ограничения (4.1.4)) из (4.3.9) следует полученное ранее представление $z^*(\zeta) = (\zeta + i)/\pi$ (см. также заключительную часть п. 4.3.2).

Еще раз подчеркнем, что параметр ε в формуле (4.3.9) отсутствует и образом области E^- при отображениях (4.3.9) для разных β и v_{\max} будут области с гладкой границей. В случае $\varepsilon = 1$ это области течения вокруг профилей оптимальной формы (см. ниже, например, рис. 4.9 и рис. 4.10, на которых показаны хордовые диаграммы скорости соответствующих оптимальных профилей, а кружками обозначены совпадающие точки разветвления и схода потока).

Подробное исследование описанного выше точного решения проведено в [41]. В частности, доказано, что при любых β и v_{\max} области

течения вокруг профилей оптимальной формы будут симметричными относительно вертикали, но не всегда однолистными. Кроме того, установлено, что распределение скорости $v^*(\gamma)$ — см. (4.3.4) монотонно возрастает на интервале $\gamma \in [-\pi/2, \pi/2]$ (и в силу симметрии монотонно убывает на интервале $\gamma \in [\pi/2, 3\pi/2]$).

4.3.2. Примеры точных решений. На рис. 4.9 и рис. 4.10 приведены формы оптимальных профилей (линии 2) и хордовые диаграммы скорости (линии 1), соответствующие точному решению, при $\beta = 90^\circ$

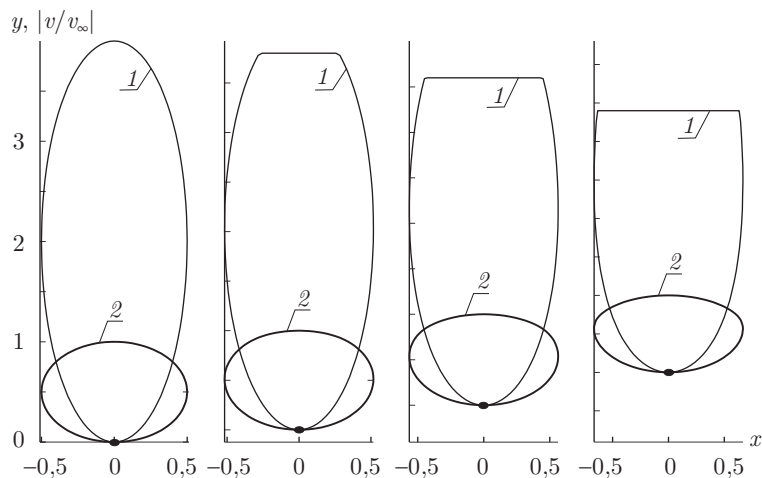


Рис. 4.9. Точные решения задачи A' для $\epsilon = 1$ при $\beta = 90^\circ$ и $v_{\max} = 4; 3,8; 3,6; 3,4$

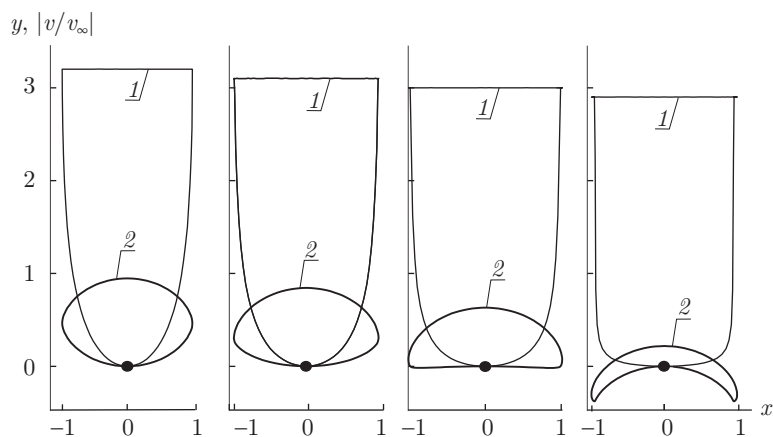


Рис. 4.10. Точные решения задачи A' для $\epsilon = 1$ при $\beta = 90^\circ$ и $v_{\max} = 3,2; 3,1; 3,0; 2,9$

и разных значениях v_{\max} . Кружками на контурах обозначены совпадающие точки разветвления и схода потока. Видно, что точные решения имеют лишь вертикальную ось симметрии. Их характеристики приведены в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Характеристики точных оптимальных решений для $\varepsilon = 1$ при $\beta = \pi/2$ и разных v_{\max}

v_{\max}	t_{\max}	C_y	Υ^*
4	1,0000	8,0000	2,0000
3,8	1,0000	7,9987	1,9997
3,6	1,0	7,9889	1,9972
3,4	1,0000	7,9528	1,9882
3,2	0,9466	7,8356	1,9589
3,1	0,8433	7,6923	1,9231
3,0	0,6317	7,3921	1,8482
2,9	0,2176	6,6228	1,6557

На рис. 4.11 и рис. 4.12 приведены точные формы оптимальных профилей (линии 2) и соответствующие хордовые диаграммы скорости (линии 1) при разных β и фиксированных значениях $v_{\max} = 1,8$ и $v_{\max} = 1,4$. Кружками на контурах обозначены критические точки. В табл. 4.4 приведены характеристики точных решений.

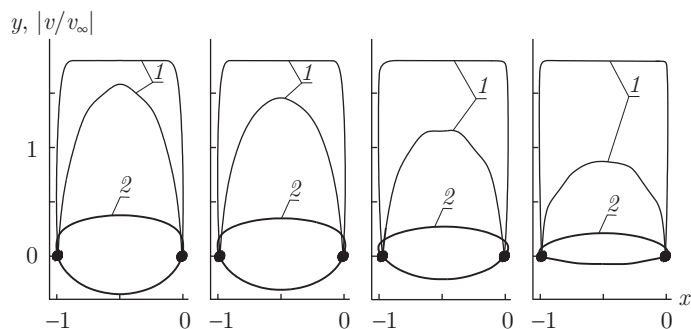


Рис. 4.11. Точные решения задачи A' для $\varepsilon = 1$ при $v_{\max} = 1,8$ и $\beta = 8^\circ; 10^\circ; 15^\circ; 20^\circ$

Как отмечено в теореме 4.5, при фиксированном значении $\beta = \beta^*$ величина v_{\max} должна удовлетворять необходимому условию разрешимости задачи A' : $v_{\max} \geq v_{\max}^* \equiv \exp \sin \beta^*$. Интересно было выявить некоторые тенденции изменения формы оптимальных профилей при увеличении v_{\max} , начиная со значения v_{\max}^* (описанная процедура

соответствует движению по вертикали в области допустимых значений параметров задачи на рис. 4.2). Рис. 4.13 и рис. 4.14 реализуют эту идею при $\beta^* = 8^\circ$ и $\beta^* = 15^\circ$ (см. также табл. 4.5). Видно, что при увеличении значения v_{\max} профили становятся толще, значение коэффициента C_y увеличивается, формы приближаются к круговой, достигая ее для значений $v_{\max} = v_{\max}^{**}$ (в данных примерах это $v_{\max}^{**} = 2,28$ и $v_{\max}^{**} = 2,5176$ соответственно). Наоборот, при уменьшении v_{\max} профили утоньшаются и, начиная с определенного значения v_{\max} , ста-

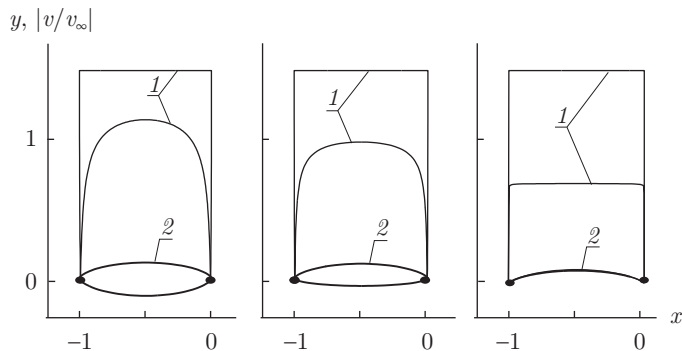


Рис. 4.12. Точные решения задачи A' для $\varepsilon = 1$ при $v_{\max} = 1,4$ и $\beta = 8^\circ; 10^\circ; 14^\circ$;

Таблица 4.4

Характеристики точных оптимальных решений для $\varepsilon = 1$ при $v_{\max} = 1,8$, $v_{\max} = 1,4$ и разных β

$v_{\max} = 1,8$	t_{\max}	C_y	Υ^*
$\beta = 8^\circ$	0,7279	1,1043	0,2761
$\beta = 10^\circ$	0,6633	1,3715	0,3429
$\beta = 15^\circ$	0,4884	2,0029	0,5007
$\beta = 20^\circ$	0,3020	2,5350	0,6337
$\beta = 27^\circ$	0,0119	2,8589	0,7147
$v_{\max} = 1,4$	t_{\max}	C_y	Υ^*
$\beta = 5^\circ$	0,3373	0,6529	0,1632
$\beta = 8^\circ$	0,2217	1,0025	0,2506
$\beta = 10^\circ$	0,1456	1,2062	0,3016
$\beta = 12^\circ$	0,0696	1,3776	0,3444
$\beta = 13^\circ$	0,0317	1,4486	0,3629
$\beta = 14^\circ$	0,0200	1,5086	0,3772

новятся неоднолистными. Отметим, что крайние слева профили практически соответствуют предельной ситуации (при дальнейшем уменьшении величины v_{\max} получим неоднолистные области течения), хотя

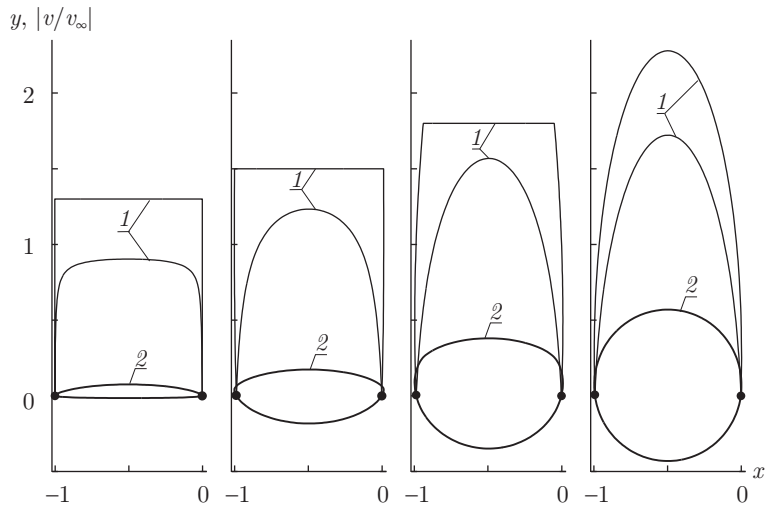


Рис. 4.13. Оптимальные контуры, соответствующие точному решению, при $\varepsilon = 1$, $\beta^* = 8^\circ$ и $v_{\max} = 1,3; 1,5; 1,8; 2,28$

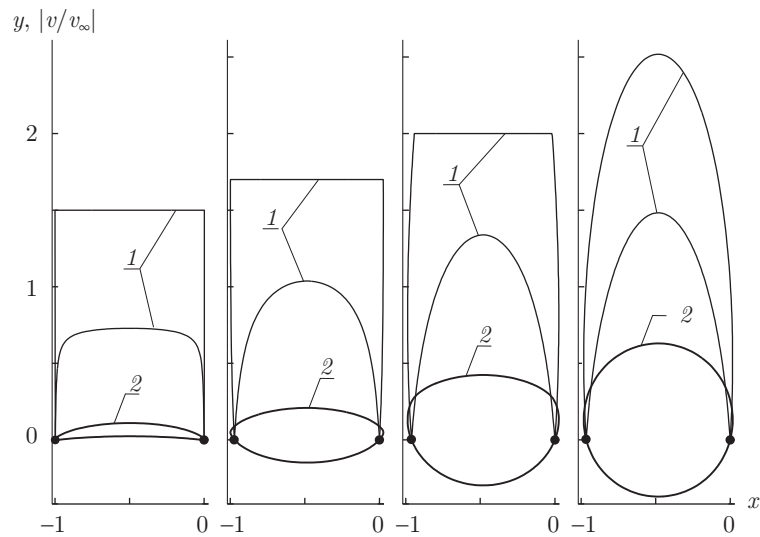


Рис. 4.14. Оптимальные контуры, соответствующие точному решению, при $\varepsilon = 1$, $\beta^* = 15^\circ$ и $v_{\max} = 1,5; 1,7; 2,0; 2,5176$

приведенные значения максимальной скорости еще далеки от минимально возможных значений v_{\max}^* (в данном случае это $v_{\max}^* = 1,15$ и $v_{\max}^{**} = 1,3$ соответственно).

Таблица 4.5

Характеристики точных оптимальных решений для $\varepsilon = 1$ при $\beta = 8^\circ$, $\beta = 15^\circ$ и разных v_{\max}

$\beta = 8^\circ$	t_{\max}	C_y	Υ^*
$v_{\max} = 1,30$	0,0903	0,9358	0,2340
$v_{\max} = 1,50$	0,3565	1,0478	0,2620
$v_{\max} = 1,80$	0,7280	1,1036	0,2759
$v_{\max} = 2,28$	1,0000	1,1134	0,2783
$\beta = 15^\circ$	t_{\max}	C_y	Υ^*
$v_{\max} = 1,5$	0,0864	1,7327	0,4332
$v_{\max} = 1,7$	0,3570	1,9481	0,4870
$v_{\max} = 2,00$	0,7205	2,0513	0,5128
$v_{\max} = 2,5176$	1,0000	2,0706	0,5176

Аналогичная картина наблюдается, если зафиксировать значение v_{\max} из допустимого интервала его изменения $[v_{\max}^*, v_{\max}^{**}]$ и увеличивать β вплоть до максимально допустимого значения β_{\max} . Описанная процедура соответствует движению по горизонтали в области допустимых значений параметров задачи на рис. 4.2. Рис. 4.15 и рис. 4.16 иллюстрируют процедуру при $v_{\max} = 1,4$ и $v_{\max} = 1,8$ соответственно (см. также табл. 4.4). Видно, что при увеличении значения β профили становятся все тоньше (линии 2), значение коэффициента C_y увеличивается, профили приближаются к дуге окружности и, начиная

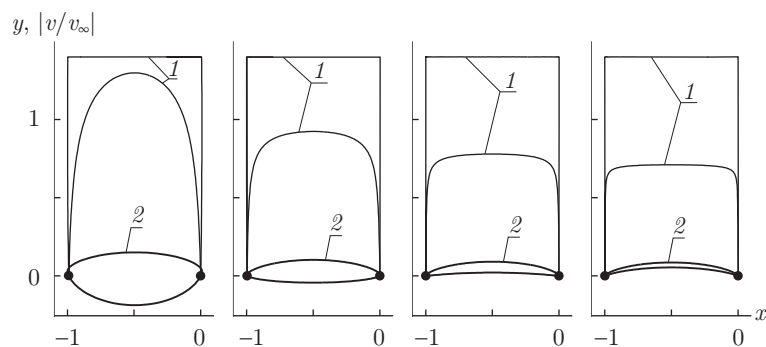


Рис. 4.15. Оптимальные контуры, соответствующие точному решению, при $\varepsilon = 1$, $v_{\max} = 1,4$ и $\beta = 5^\circ; 10^\circ; 12^\circ; 13^\circ$

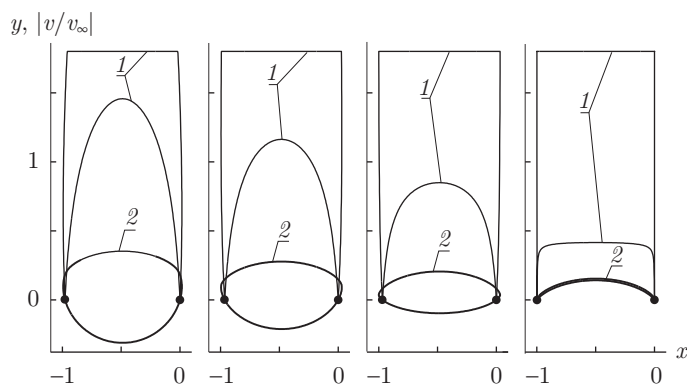


Рис. 4.16. Оптимальные контуры, соответствующие точному решению, при $\epsilon = 1$, $v_{\max} = 1,8$ и $\beta = 10^\circ$; 12° ; 20° ; 27°

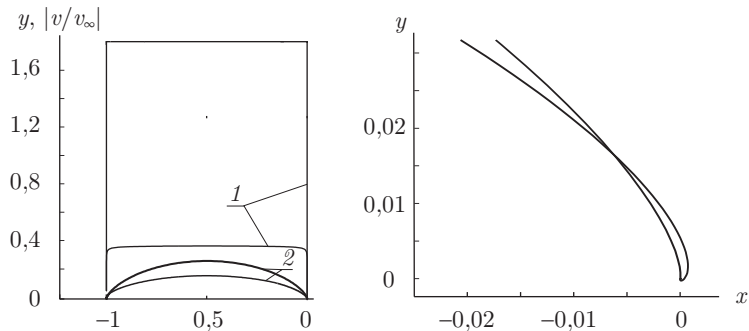


Рис. 4.17. Оптимальные контуры, соответствующие точному неоднолистному решению, при $v_{\max} = 1,8$ и $\beta = 28^\circ$ и строение контура в окрестности задней кромки

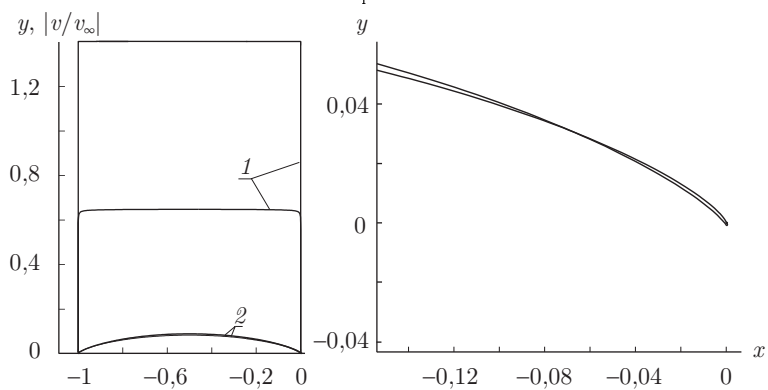


Рис. 4.18. Оптимальные контуры, соответствующие точному неоднолистному решению, при $v_{\max} = 1,4$ и $\beta = 14^\circ$ и строение контура в окрестности задней кромки

с определенного значения β , существенно меньшего β_{\max} , получаем неоднолистные области течения (в данных примерах $\beta_{\max} = 19,65^\circ$ и $\beta_{\max} = 36^\circ$ соответственно).

На рис. 4.17 и рис. 4.18 представлены формы оптимизированных профилей (линии 2) при $\varepsilon = 1$ для $v_{\max} = 1,8$, $\beta = 28^\circ$ и для $v_{\max} = 1,4$, $\beta = 14^\circ$, соответствующих неоднолистным областям течения, а также в увеличенном виде строение контуров в окрестности точки схода потока (в силу симметрии точно так же устроены оптимизированные профили в окрестности передней критической точки). Отметим, что хордовые диаграммы скорости (линии 1) для этих профилей мало отличаются от двух полук.

4.4. Численная оптимизация формы крыла экраноплана

Описанный выше подход к аэродинамической оптимизации формы крыловых профилей на основе решения основной вариационной ОКЗА может быть применен и в случае усложненной топологии течения. Одной из таких задач является следующая.

В физической плоскости $z = x + iy$ (рис. 4.19) гладкий (за исключением, возможно, задней кромки B с внешним углом $\varepsilon\pi$, $1 \leq \varepsilon \leq 2$, являющейся точкой схода потока) непроницаемый контур L_z плавно обтекается вблизи прямолинейного непроницаемого экрана l_z потоком ИНЖ со скоростью $v_\infty = 1$ на бесконечности, h — клиренс (расстояние от задней кромки B профиля до экрана). Известны периметр $L = 2$ контура L_z и величины h и $\varepsilon\pi$. Требуется найти форму L_z , максимизирующую коэффициент подъемной силы профиля, ограниченного этим контуром, при условии, что задано максимальное значение скорости на контуре.

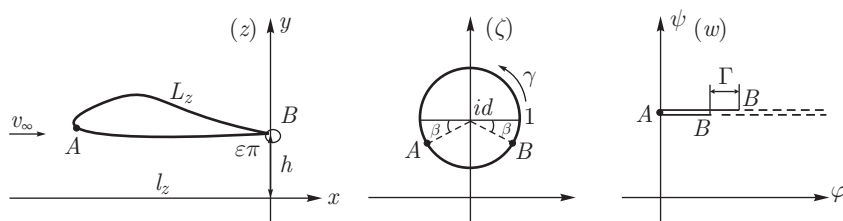


Рис. 4.19. К постановке задачи B

4.4.1. Оптимизируемый функционал. Двусвязность области течения значительно усложняет построение интегрального представления класса искомых контуров и трех условий разрешимости задачи (двух интегральных равенств — условий замкнутости L_z и одного интегрального равенства — условия задания величины v_∞). При построении этого интегрального представления применен метод [39].

В качестве канонической области G_ζ во вспомогательной плоскости ζ возьмем верхнюю полуплоскость с вырезом в виде единичного круга с центром в точке $d\bar{i}$ (рис. 4.19), $d > 0$ — параметр, определяемый в ходе решения, $A = d\bar{i} - e^{i\beta}$ и $B = d\bar{i} + e^{-i\beta}$ — прообразы точек разветвления и схода потока, β — аналог теоретического угла атаки. Как и в случае основной вариационной ОКЗА, возможны различные варианты постановки задачи, когда величина β фиксируется заранее (что служит дополнительным ограничением при оптимизации) или является параметром оптимизации.

Обозначим через $w(z) = \varphi + i\psi$ комплексный потенциал обтекания искомого профиля в физической плоскости. Пусть $\psi = 0$ на экране l_z , тогда на контуре профиля $\psi = \text{const}$, а областью изменения w будет верхняя полуплоскость с разрезом вдоль линии, параллельной оси φ (см. рис. 4.19).

Для построения производной комплексного потенциала течения в области G_ζ используем метод особых точек Чаплыгина. Сначала рассмотрим обтекание круга в безграничном потоке. На окружности скорость обращается в нуль в точках $\zeta_1^1 = d\bar{i} - e^{i\beta}$, $\zeta_2^1 = d\bar{i} + e^{-i\beta}$ разветвления и схода потока, а в ее центр $\zeta_d^1 = d\bar{i}$ поместим диполь. Тогда у искомой производной $w'(\zeta)$ в точке ζ_d^1 будет полюс второго порядка. Теперь комплексную скорость обтекания окружности в безграничном потоке можно записать в виде

$$w'(\zeta) = u \frac{(\zeta - \zeta_1^1)(\zeta - \zeta_2^1)}{(\zeta - \zeta_d^1)^2}.$$

Комплексный потенциал, выраженный этой формулой, описывает течение, в котором окружность $|\zeta - d\bar{i}| = 1$ является линией тока, однако условие непроницаемости горизонтального экрана не выполняется: через l_z будет проходить поток с нормальной составляющей скорости, равной $-\text{Im } w'(\zeta)$. Для того, чтобы добиться непроницаемости экрана, построим еще одну окружность, зеркально симметричную исходной относительно экрана, и рассмотрим комплексный потенциал нового течения с двумя дополнительными критическими точками $\bar{\zeta}_1^1$, $\bar{\zeta}_2^1$ и полюсом второго порядка в точке $\bar{\zeta}_d^1$:

$$w'(\zeta) = u \frac{(\zeta - \zeta_1^1)(\zeta - \zeta_2^1)(\zeta - \bar{\zeta}_1^1)(\zeta - \bar{\zeta}_2^1)}{(\zeta - \zeta_d^1)^2(\zeta - \bar{\zeta}_d^1)^2}.$$

Теперь на экране $\text{Im } w'(\xi) = 0$, однако, как нетрудно убедиться, условие непроницаемости не выполняется на окружности $|\zeta - d\bar{i}| = 1$. Этого можно избежать путем инверсии указанных особых точек относительно верхней окружности. При этом нижняя перейдет в окружность, целиком лежащую внутри верхней, а точки $\bar{\zeta}_1^1$, $\bar{\zeta}_2^1$, $\bar{\zeta}_d^1$ перейдут соответственно в точки

$$\zeta_1^{n+1} = d\bar{i} + \frac{1}{\zeta_1^n + d\bar{i}}, \quad \zeta_2^{n+1} = d\bar{i} + \frac{1}{\zeta_2^n + d\bar{i}}, \quad \zeta_d^{n+1} = d\bar{i} + \frac{1}{\zeta_d^n + d\bar{i}} \quad (4.4.1)$$

при $n = 1$. Описанную процедуру можно повторить и для остальных точек. В итоге получим выражение искомой скорости обтекания круга над экраном, содержащее бесконечные произведения:

$$w'(\zeta) = uU_1(\zeta)U_2(\zeta),$$

где

$$U_1(\zeta) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - \zeta_1^n)(\zeta - \bar{\zeta}_1^n)}{(\zeta - \zeta_d^n)(\zeta - \bar{\zeta}_d^n)}, \quad U_2(\zeta) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - \zeta_2^n)(\zeta - \bar{\zeta}_2^n)}{(\zeta - \zeta_d^n)(\zeta - \bar{\zeta}_d^n)},$$

а величины ζ_1^n , ζ_2^n , ζ_d^n находятся по рекуррентной формуле (4.4.1). При численных расчетах можно ограничиться конечным числом M членов этого произведения. В проведенных вычислительных экспериментах значение M не превосходило 10, что оказалось достаточным для обеспечения удовлетворительной точности задания распределения скорости по окружности, расположенной над экраном, и удовлетворения трех указанных выше условий разрешимости задачи.

Введем функцию

$$\chi(\zeta) = \ln \frac{dw/dz(\zeta)}{U_1(\zeta)U_2^{\varepsilon-1}(\zeta)}.$$

Она не имеет особенностей в области G_ζ и должна удовлетворять условию симметрии $\chi(\zeta) = \chi(\bar{\zeta})$, которое гарантирует прямолинейность экрана. Представим эту функцию в виде ряда Лорана

$$\chi(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_k + i b_k}{(\zeta - di)^{k-1}} + \frac{a_k - i b_k}{(\zeta + di)^{k-1}} \right], \quad (4.4.2)$$

где a_k , b_k , $k \geq 1$, являются управляющими параметрами и должны обеспечивать максимум коэффициента подъемной силы, а также выполнение условий разрешимости и ограничений, используемых при оптимизации. При численной оптимизации достаточно ограничиться конечным числом N членов этого ряда (в проведенных вычислительных экспериментах значение N не превосходило 20). По найденной функции $\chi(\zeta)$ можно определить искомую функцию по формуле

$$z(\zeta) = u \int_{di + e^{-i\beta}}^{\zeta} e^{-\chi(\zeta)} U_2^{\varepsilon-1}(\zeta) d\zeta + i h.$$

Координаты искомого контура и клиренс определяются формулами $x(\gamma) + i y(\gamma) = z(di + e^{i\gamma})$, $h = y(-\beta)$. Как и в разд. 1.4, параметр u в приведенных формулах определяет масштаб длин в физической плоскости, т.е. $u = 2/I_0(P)$, причем в данном случае минимизируемый

функционал

$$I_0(P) = \int_0^{2\pi} \exp[-P(\tau)] |U_2(e^{i\tau}, \beta)|^{\varepsilon-1} d\tau, \quad P(\tau) = \operatorname{Re} \chi(e^{i\tau}).$$

Требование ограниченности максимальной скорости на контуре заданной величиной v_{\max} также может быть выражено через функцию $P(\gamma)$ и параметр β в виде (1.4.19), где

$$H_0(\gamma, \beta) = \ln v_{\max} + (\varepsilon - 2) \ln |U_2(e^{i\gamma}, \beta)| - \ln |U_1(e^{i\gamma}, \beta)|.$$

4.4.2. Итерационный процесс и численное решение. Для численного решения поставленной вариационной задачи взяты метод оптимизации, основанный на уравнениях Куна–Таккера, и алгоритм SQP, описанный выше. Была разработана итерационная процедура, состоящая из следующих этапов.

— На первом шаге задаются величины ε , β , $v_{\infty} = 1$, h и число N параметров a_k и b_k из (4.4.2), а также фиксируется начальный отрезок $[a, b]$ для поиска параметра d .

— Определяется значение $d^0 = (b - a)/2$ и максимизируется коэффициент C_y при условиях замкнутости контура, фиксации v_{∞} и ограничении на максимум скорости; в результате определяются значения коэффициентов a_k и b_k , $k = 1, \dots, N$.

— По найденным a_k , b_k определяется величина h . Если она не совпадает с начальным заданным значением, то стандартным методом половинного деления изменяется величина d^0 и осуществляется переход ко второму этапу. Если происходит совпадение заданной и найденной величин h , то оптимальный контур определен и все его характеристики могут быть легко вычислены.

Основная трудность при численной реализации этого алгоритма заключалась в подборе начального отрезка $[a, b]$ для нахождения соответствующего параметра d . Вычислительные эксперименты показали, что чем удачнее выбран отрезок $[a, b]$, тем меньше время расчета.

Результаты численного решения задачи при разных отстояниях $h = 0,1; 0,5; 1,0$ для $\varepsilon = 1$, $v_{\max} = 2,0$ и $\beta = 10^\circ$ представлены на рис. 4.20. Аэродинамические и геометрические характеристики оптимальных контуров приведены в табл. 4.6; в ней же для сравнения при $h = \infty$ даны характеристики точного решения. Видно, что для $h = 0,1$ при $v_{\max} = 2,0$ и $\beta = 10^\circ$ оптимальный контур является самопересекающимся. При уменьшении величины v_{\max} до 1,84 удалось получить однолистный контур, который представлен на рис. 4.21 (линия 2). Здесь линия 1 — хордовая диаграмма скорости. Этот профиль имеет $C_y = 0,174$ и $t_{\max} = 0,147$ при $\alpha = 0,23$. На рис. 4.22 представлены оптимальные профили для $\varepsilon = 2$ и $v_{\max} = 1,84$ (а) и $v_{\max} = 2$ (б, в), $\beta = 10^\circ$ при разных отстояниях, а соответствующие им характеристики приведены в табл. 4.7.

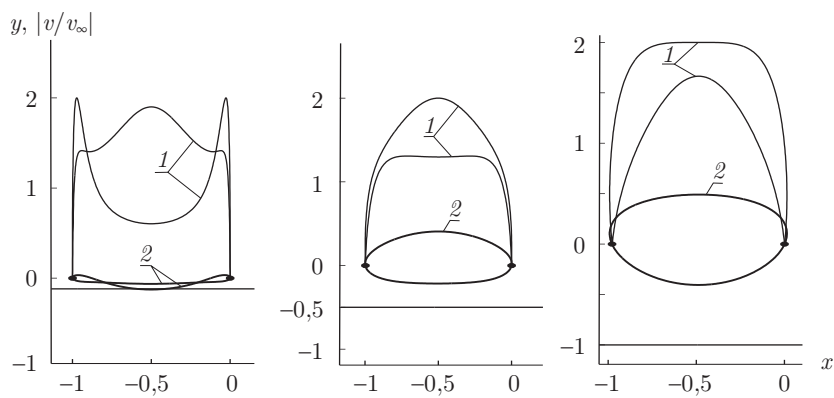


Рис. 4.20. Оптимальные контуры (2), построенные численно для $\varepsilon = 1$, $v_{\max} = 2$ при $\beta = 10^\circ$ и $h = 0,1; 0,5; 1,0$; 1 — хордовые диаграммы скорости

Таблица 4.6

Характеристики численных решений при $v_{\max} = 2,0$ и $\beta = 10^\circ$ для $h = 0,1; 0,5; 1,0; \infty$ в сравнении с точным решением при $h = \infty$

h	d	C_y	t_{\max}	α	Υ^*
0,1	1,06	-1,3673	-0,0684	0,266	-0,2572
0,5	1,5325	0,9692	0,6321	1,7269	0,2578
1,0	2,2511	1,2535	0,8995	9,5793	0,3265
∞	∞	1,3846	0,8386	9,233	0,3462
Точное решение					
∞	—	1,3854	0,8530	8,9552	0,3463

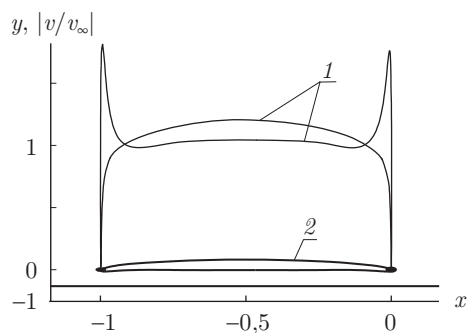


Рис. 4.21. Оптимальный контур, построенный численно для $\varepsilon = 1$, $v_{\max} = 1,84$ при $\beta = 10^\circ$ и $h = 0,1$

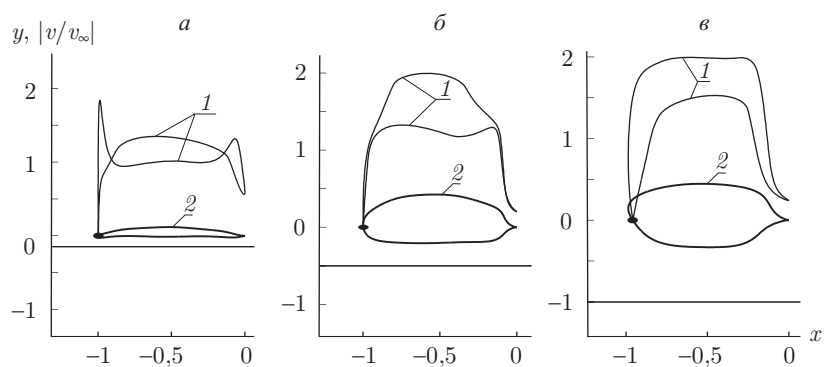


Рис. 4.22. Оптимальные контуры (2), построенные численно для $\varepsilon = 2$, $v_{\max} = 1,84$ и $v_{\max} = 2$ соответственно при $\beta = 10^\circ$ и $h = 0,1; 0,5; 1,0$ и хордовые диаграммы скорости (1)

Таблица 4.7

Характеристики численных решений при $\beta = 10^\circ$ для разных h

h	a	C_y	t_{\max}	α	Υ^*
$v_{\max} = 1,84$					
0,1	1,1781	0,154	0,1351	-0,07	0,0399
$v_{\max} = 2,0$					
0,5	1,5555	0,9694	0,6322	4,2207	0,2585
1,0	2,4355	1,2478	0,8389	12,4883	0,3233

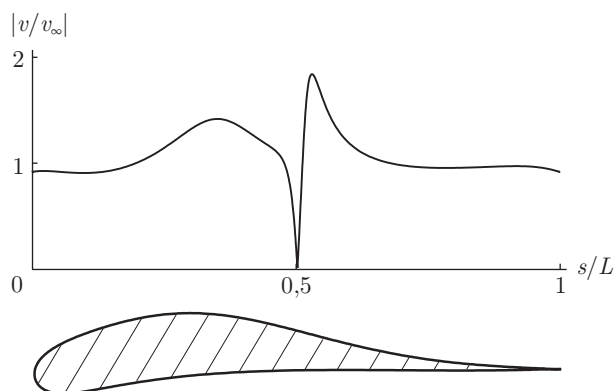


Рис. 4.23. Оптимальный безотрывный крыловой профиль и соответствующее распределение скорости при $\beta = 10^\circ$ и $h = 0,1$ для $v_{\max} = 1,84$

Чтобы избежать возможного отрыва потока на верхней и нижней поверхностях профиля вблизи задней кромки, дополнительно учтем при оптимизации условие безотрывности обтекания, описанное выше. Один из оптимизированных профилей, рассчитанный по методу Кочина–Лойцянского для полностью турбулентного ПС, имеет вид, представленный на рис. 4.23; характеристики профиля:

$$h = 0,1; \quad a = 1,1576; \quad C_y = 0,0301; \\ t_{\max} = 0,0951; \quad \alpha = -0,96; \quad \Upsilon^* = 0,0122.$$

4.5. Исторические замечания и библиографические ссылки

4.5.1. Задачи аэродинамической оптимизации. Задачи нахождения формы тел, имеющих экстремальные аэродинамические характеристики при обтекании жидкостью или газом, возникли с самого начала развития аэрогидродинамики и как чисто теоретические, и как важные для приложений проблемы. В рамках выбранных математических моделей течений решение таких задач позволяет не только предъявить наилучшие формы, но и дать точные оценки оптимизируемых характеристик и тем самым указать инженеру-проектировщику границы допустимого при оптимизации.

Ярким примером сказанному являются многочисленные работы по поиску формы крыловых профилей максимальной подъемной силы, выполненные в 1920–1930 гг. К этому циклу исследований относится и выдающаяся работа М. А. Лаврентьева [66], который доказал, что среди гладких дуг заданной длины и ограниченной кривизны наибольшая циркуляция скорости Γ (следовательно, максимальная подъемная сила Y) при безотрывном обтекании потоком ИНЖ достигается на дуге окружности. Этот результат объяснил преимущество перед другими (в смысле максимизации Y) профилей Жуковского, так как их обтекание при не слишком большой толщине хорошо моделируется обтеканием средней линии, т. е. дуги окружности.

Один из известных подходов к аэродинамической оптимизации крыловых профилей базируется на решении прямых краевых задач. При этом задают многопараметрическое семейство контуров определенного типа для модификации некоторого исходного контура. Для каждого профиля рассчитывают аэродинамические характеристики, а их оптимизацию проводят за счет выбора значений свободных параметров в уравнении контура при различных ограничениях. Обзор этих работ можно найти в [34] (пп. 9.2, 10.2), а также в [84].

Описанный подход позволяет определить оптимальный профиль в фиксированном многопараметрическом классе. Это в свою очередь требует специальных способов перебора контуров заданного семейства, так как при произвольном изменении значений управляющих параметров могут нарушиться введенные ограничения. Кроме того, при таком

подходе не удастся в явном виде записать оптимизируемые функции, а последовательное решение прямых задач требует применения методов численной оптимизации и значительных затрат вычислительных средств.

Другой подход к оптимизации аэродинамических форм базируется на теории ОКЗ. Первый способ оптимизации формы профилей на основе решения ОКЗ состоит в оптимальном выборе исходного распределения скорости $v(s)$ в краевом условии. Такой способ описан в гл. 6.

Второй способ оптимизации методами ОКЗ, развиваемый в гл. 4 и следующей главах, базируется на решении вариационных обратных краевых задач аэрогидродинамики. Эти задачи заключаются в построении профилей, обладающих оптимизированными аэродинамическими характеристиками (максимальной подъемной силой, минимальным сопротивлением и т. п.), и сводятся к вариационным обратным задачам для аналитических функций.

4.5.2. Вариационные ОКЗА. Постановка вариационных ОКЗА восходит к работе М. А. Лаврентьева [66], в которой получено точное решение задачи максимизации подъемной силы дуги заданной длины и ограниченной кривизны при безотрывном ее обтекании потоком идеальной несжимаемой жидкости. В ней также сказано о необходимости учета при оптимизации условий, обеспечивающих безотрывность обтекания.

Обзор методов и результатов построения крыловых профилей с высоким значением подъемной силы содержится в [118] (отметим, что в этой работе не отражены достижения российских ученых). В [53] рассмотрена задача об определении среди профилей с одной острой кромкой и заданной длиной периметра контура такого, который обладает наибольшей подъемной силой в равномерном на бесконечности потоке ИНЖ. Предложен численный метод решения, учитывающий приближенные условия безотрывности обтекания. Утверждается также, что в случае гладкого контура экстремалью будет круг и что этот результат следует из формул М. А. Лаврентьева (например, [67]) для вариации конформных отображений областей, близких к кругу. Названное утверждение как частный случай получено в [29] на основе решения соответствующей вариационной обратной краевой задачи. Кроме того, в [29] доказана соответствующая теорема единственности экстремального решения. При дополнительных ограничениях, имеющих физический смысл (условии безотрывности обтекания с учетом вязкости потока в приближении пограничного слоя, учете сжимаемости среды и других), оптимизированные решения существенно отличаются от круга, а получить их удастся только численно [44–46]. Вместе с тем решение в виде круга получается аналитически, при минимальных ограничениях, диктуемых математической моделью течения, и, следовательно, дает точную оценку сверху для подъемной силы, достижимую в случае течения ИНЖ.

Решению вариационных ОКЗА для дозвукового течения идеального или вязкого газа и вязкой жидкости посвящено, насколько нам известно, небольшое число работ. Они базируются на решении последовательности прямых краевых задач аэрогидродинамики, используют теорию ПС и методы численной оптимизации (см. [34]).

4.5.3. Основная вариационная ОКЗА. Как известно из теории ОКЗА [35, 36, 109], если на искомом контуре задано распределение скорости $v = v(s)$ как функция дуговой абсциссы s этого контура, то решение такой ОКЗА (которая называется основной) определяется однозначно, причем управляющая функция P и теоретический угол атаки β однозначно находятся по распределению $v = v(s)$. Учитывая, что циркуляция скорости $\Gamma = Sv \equiv \int_0^L v(s) ds$ (L — периметр контура), для решения задачи максимизации Γ нужно максимизировать функционал Sv на соответствующем классе функций $v(s)$. Этот класс определяется условиями гидродинамической целесообразности, описанными, например, в гл. 6 и учитывающими как условия физической реализуемости решения (соответствие принятой математической модели течения, однолистность области течения, отсутствие отрыва пограничного слоя, ограничение максимального значения скорости на контуре и др.), так и условия разрешимости (конструктивной реализуемости). Наиболее полный учет всех условий является основной задачей при выборе оптимальных гидродинамически целесообразных распределений скорости. В результате возникают содержательные вариационные задачи, причем экстремальными являются так называемые полочные распределения (с участком постоянства скорости). Однако при этом выразить условия разрешимости ОКЗА через функцию $v(s)$ не удастся, и поэтому приходится удовлетворять их подбором свободных параметров, вводимых в рассматриваемый класс распределений $v(s)$, либо применять метод квазирешений ОКЗА. Последний минимально (в смысле нормы используемого функционального пространства) изменяет экстремальное распределение $v(s)$, но при этом, что особенно важно, сохраняет неизменным значение Γ циркуляции скорости, т.е. экстремальное значение функционала Sv , хотя величина угла β , конечно, изменяется. Отметим, что приближенные оптимизированные решения, построенные в [53], также имеют полочные распределения скорости.

Насколько нам известно, впервые основная вариационная ОКЗА была поставлена и сформулирована как вариационная задача в работе [44] как развитие исследований, выполненных первым из авторов в его докторской диссертации (1990 г.) и отраженных в монографии [35] (разд. 3). Класс вариационных ОКЗА описан в [49], там же доказаны теоремы существования и единственности решений. Точные решения основной вариационной ОКЗА построены в [30, 50–52].

4.5.4. Круг как экстремальное решение. В случае расположения на окружности точечного стока заданной интенсивности Q в [1] показано, что $\Upsilon^* = 2\sqrt{2}$ и соответствует выбору значения $q = \sqrt{2}$

безразмерного расхода $q = Q/(v_\infty L)$. При дальнейшем увеличении q до 4 циркуляция уменьшается до нуля, причем при $q > 4$ нарушается принятая схема обтекания, а при $q = 0$ (сток отсутствует) имеем, как и следовало ожидать, $\Upsilon^* = 2$. В случае расположения на окружности двух точечных особенностей — источника и стока с заданными интенсивностями Q_1 и Q_2 — максимуму циркуляции соответствует выбор $Q_1 = Q_2$, а абсолютный максимум $\Upsilon^* = 6$ достигается при $Q_1, Q_2 \rightarrow \infty$ — это случай диполя [2]. Таким образом, наличие на окружности точечных особенностей приводит не только к изменению топологии течения, но и к значительному увеличению максимального значения циркуляции скорости.

Лемма 4.1 доказана Ф. Г. Авхадиевым [97].

4.5.5. Аэродинамическая оптимизация методами ОКЗ. Подходы к аэродинамической оптимизации формы крыловых профилей на основе теории ОКЗ были намечены в работах [29, 44]. Впервые эти подходы были реализованы численно в [45, 46]. Многочисленные вычислительные эксперименты были проведены Е. В. Федоровым в его кандидатской диссертации (1993 г.), их результаты в систематизированном виде изложены в [35].

Теоретические основы численных методов решения вариационных ОКЗА представлены в [43]. Вычислительные эксперименты по аэродинамической оптимизации на основе уравнений Куна–Таккера, в том числе для профилей экранопланов выполнены в большом объеме А. Н. Ихсановой в кандидатской диссертации (2004 г.). Их результаты описаны в [39, 40, 107]. Вычислительные эксперименты в основной ОКЗА, реализующие теоретические результаты из [43], проведены А. Э. Илюхиным в кандидатской диссертации (2006 г.). Их результаты представлены в [37, 38].

ПОТОК ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗА С БОЛЬШИМИ ЧИСЛАМИ РЕЙНОЛЬДСА

В гл. 4 в рамках модели ИНЖ получены точные решения основной вариационной ОКЗА — задачи максимизации коэффициента подъемной силы при ограничении на максимум скорости — и построены соответствующие аэродинамические формы, реализующие этот максимум. В силу простоты выбранной математической модели течения в ряде случаев полученные профили не соответствуют требованиям аэродинамического проектирования. Таковым, в частности, является круг, максимизирующий коэффициент C_y в потоке ИНЖ при отсутствии ограничения на максимум скорости. Поэтому при оптимизации нужно учитывать сжимаемость и вязкость потока. Одна из возможных моделей учета названных свойств описана выше в п. 1.3.3. В соответствии с ней профиль из заданного класса обтекается потоком газа Чаплыгина, распределение скорости на контуре профиля совпадает с ее распределением на контуре полутела вытеснения и удовлетворяет условию безотрывности обтекания. Требуется найти такой профиль, чтобы при условии безотрывного обтекания он обладал оптимальными аэродинамическими характеристиками (наибольшей подъемной силой, наименьшим профильным сопротивлением или максимальным аэродинамическим качеством).

Как известно, условие безотрывности полностью турбулентного ПС гарантирует отсутствие отрыва турбулентного потока и при наличии ламинарных участков. Исходя из этого, а также учитывая, что расчеты всего слоя как турбулентного всегда дают завышенные и, следовательно, более надежные значения коэффициентов профильных потерь, всюду в дальнейшем будем рассматривать обтекание профиля полностью турбулентным потоком. Такое предположение не противоречит известным свидетельствам того, что в действительных условиях обтекания с числами Рейнольдса на бесконечности порядка 10^6 и выше ПС на профиле следует считать полностью турбулентным. Названное предположение было использовано в вычислительных экспериментах, результаты которых обсуждены ниже.

5.1. Постановка вариационных задач

5.1.1. Множество управляющих функций. В силу сделанных предположений каждому профилю при обтекании его газом Чаплыгина однозначно соответствует распределение приведенной скорости $\lambda = \lambda(s)$,

$$\lambda(s) = (s - s_*)[(L - s)s]^{2/\varepsilon - 1} \lambda_0(s), \quad s \in [0, L], \quad (5.1.1)$$

где дуговая абсцисса s контура L_z отсчитывается от $s = 0$ в точке B до $s = L$ в ней же (область течения остается слева, см. рис. 1.1), s_* — координата точки разветвления потока, $\lambda_0(s) > 0$ — непрерывная функция.

В соответствии с гипотезой Жуковского–Чаплыгина–Кутта для $\varepsilon \in (1, 2]$ точкой схода потока при обтекании рассматриваемых профилей должна быть их острая кромка B (это обеспечивается множителем $[(L - s)s]^{2/\varepsilon - 1}$ в формуле (5.1.1)), а величина Y подъемной силы пропорциональна циркуляции скорости Γ . При $\varepsilon = 1$ для определения Γ зафиксируем в качестве точки схода потока отмеченную на L_z точку B .

Обратно, если на L_z задано распределение скорости $\lambda(s)$ в виде (5.1.1), то контур L_z может быть найден из решения соответствующей ОКЗА (п. 1.4.4). Он будет образом единичной окружности при квазиконформном отображении $z = z_P(\zeta)$ внешности круга $|\zeta| > 1$ — (1.4.29), которое перепишем в виде

$$z_P(\zeta) = u \int_{e^{-i\beta}}^{\zeta} \exp[-(\mathbf{S}P)(\zeta)] \left(1 - \frac{e^{-i\beta}}{\zeta}\right)^{\varepsilon-1} d\zeta - \\ - c^2 \exp[(\mathbf{S}P)(\zeta)] \left(1 - \frac{e^{-i\beta}}{\zeta}\right)^{3-\varepsilon} \left(1 + \frac{e^{-i\beta}}{\zeta}\right)^2 d\zeta, \quad (5.1.2) \\ u = \frac{\Gamma}{4\pi \sin \beta},$$

где $\chi(\zeta)$ — аналитическая функция, $P(\gamma) = \operatorname{Re} \chi(e^{i\gamma}) = S(\gamma) - S_0(\gamma)$ и удовлетворяет условию Гёльдера. Функция $S_0(\gamma)$ содержит логарифмические особенности, соответствующие точкам разветвления и схода потока на профиле:

$$S_0(\gamma) = \ln M(\gamma, \beta) - (\varepsilon - 1) \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|, \quad M(\gamma, \beta) = 2 |\sin \gamma + \sin \beta|.$$

Зависимость $s = s(\gamma)$ на окружности $\zeta = e^{i\gamma}$, величина циркуляции Γ и значение β однозначно определяются по распределению скорости $\lambda(s)$ (см. п. 1.4.4). Параметр β является аналогом теоретического угла атаки.

В представлении (5.1.2) класса оптимизируемых контуров управляющая функция $P(\gamma)$ должна удовлетворять ограничениям (1.4.8), (1.4.16) и (1.4.17) (с постоянными из (1.4.30) в правой части). Кроме того, в силу предположения о дозвуковом характере обтекания должно выполняться неравенство $\lambda \leq 1$. В силу (1.2.19) оно равносильно неравенству

$$\Lambda(\lambda) \equiv \exp S(\lambda) = 2\lambda[1 + (1 + 4c^2\lambda^2)^{1/2}]^{-1} \leq c_0; \quad c_0 = \frac{2}{\sqrt{1 + 4c^2} + 1}.$$

Напомним, что функции $S(\gamma) = P(\gamma) + S_0(\gamma)$ и $\lambda(s)$ связаны формулой

$$\lambda[s(\gamma)] = \exp[S(\gamma)] \{1 - c^2 \exp[2S(\gamma)]\}^{-1}. \quad (5.1.3)$$

В силу (5.1.3) течение будет дозвуковым ($\lambda[s(\gamma)] \leq 1$), если

$$P(\gamma) + S_0(\gamma) \leq \ln c_0. \quad (5.1.4)$$

Значит, должно выполняться ограничение (1.4.19), где нужно заменить v_{\max} на величину c_0 . Для удобства запишем все перечисленные ограничения вместе:

$$\begin{aligned} A_0(P) &\equiv \int_0^{2\pi} P(\gamma) d\gamma = B_0, \\ A_1(P) + i A_2(P) &\equiv \int_0^{2\pi} P(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma = B_1 + i B_2, \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

где

$$\begin{aligned} B_0 &= 2\pi \ln \Lambda_\infty, \quad B_1 + i B_2 = -4\pi i \sin \beta \frac{c^2 \Lambda_\infty^2}{1 + c^2 \Lambda_\infty^2} - \pi(\varepsilon - 1) e^{-i\beta}, \\ \Lambda_\infty &= \Lambda(\lambda_\infty) = \frac{2\lambda_\infty}{1 + (1 + 4c^2 \lambda_\infty^2)^{1/2}}, \\ P(\gamma) &\leq H_c(\gamma, \beta) + (\varepsilon - 1) \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|, \\ H_c(\gamma, \beta) &\equiv \ln \frac{c_0}{M(\gamma, \beta)}. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Итак, профили рассматриваемого класса могут быть описаны с помощью интегрального представления (5.1.2), где управляющая функция $P(\gamma)$ удовлетворяет условиям (5.1.5) и (5.1.6).

Будем рассматривать два случая, когда параметр β зафиксирован заранее или изменяется в интервале $[0, \pi/2]$.

5.1.2. Функционалы для оптимизации аэродинамических характеристик. Из формулы (5.1.2) выведем равенство

$$|s'(\gamma)| = \Gamma(4\pi \sin \beta)^{-1} \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|^{\varepsilon-1} \exp[-P(\gamma)] T(P, \beta; \gamma), \quad (5.1.7)$$

$$T(P, \beta; \gamma) = 1 - c^2 \exp[2P(\gamma)] M^2(\gamma, \beta) \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|^{2-2\varepsilon}, \quad (5.1.8)$$

причем в силу (5.1.4) выражение $T(P, \beta; \gamma)$ в (5.1.8) строго положительно. Аналогично выводу формул (1.4.13) получим

$$\Gamma = 4\pi L \sin \beta [I_c(P)]^{-1} = 8\pi \sin \beta [I_c(P)]^{-1},$$

где строго выпуклый по P функционал

$$I_c(P) = \int_0^{2\pi} G_0(P; \gamma) T(P, \beta; \gamma) d\gamma, \quad (5.1.9)$$

$$G_0(P; \gamma) = \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|^{\varepsilon - 1} \exp[-P(\gamma)].$$

При $c = 0$ (что соответствует переходу к модели ИНЖ) он совпадает с функционалом в (1.4.13). Теперь аналогично (1.4.20) можем записать

$$Y = 4\pi \rho_\infty \lambda_\infty^2 L \sin \beta [I_c(P)]^{-1}, \quad C_y = 16\pi \sin \beta [I_c(P)]^{-1}. \quad (5.1.10)$$

Таким образом, в данном случае для максимизации коэффициента подъемной силы нужно минимизировать функционал $I_c(P) \operatorname{cosec} \beta$ на множестве допустимых функций $P(\gamma)$ и параметров оптимизации β , удовлетворяющих трем линейным ограничениям типа равенства (5.1.5) и одному линейному ограничению типа неравенства (5.1.6).

В отличие от случая ИНЖ в данной ситуации параметр β не может принимать произвольные значения из интервала $[0, \pi/2]$, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. Пусть $c^2 = 0,296$. Если

$$\lambda_\infty > \lambda_\infty^*(\beta), \quad \lambda_\infty^*(\beta) = \frac{\exp(T_*)}{1 - c^2 \exp(2T_*)},$$

где T_* — единственный корень уравнения

$$T - c_0 + D(T, \beta) = 0, \quad (5.1.11)$$

$$D(T, \beta) = \frac{\sin \beta [1 - c^2 \exp(2T)]}{1 + c^2 \exp(2T)},$$

то для любого профиля, обтекаемого газом Чаплыгина и имеющего теоретический угол атаки, равный β (или больше), на контуре профиля найдутся точки, в которых $\lambda > 1$.

Доказательство. Возьмем $S(\gamma) = P(\gamma) + S_0(\gamma)$ в качестве новой управляющей функции и рассмотрим линейный функционал

$$T = A_0(S) \equiv \int_0^{2\pi} S(\gamma) d\gamma. \quad (5.1.12)$$

В силу (5.1.4), (5.1.5) и (5.1.6) получим

$$T = 2\pi \ln \Lambda(\lambda_\infty), \quad (5.1.13)$$

$$\int_0^{2\pi} S(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma = 2\pi i D(T, \beta), \quad (5.1.14)$$

$$S(\gamma) \leq c_0. \quad (5.1.15)$$

Отметим, что при $c^2 = \text{const}$ функция $\Lambda(\lambda_\infty)$ в формуле (5.1.13) строго возрастает на интервале $(0, 1)$. В силу этого свойства однозначно определим величину

$$\lambda_\infty = \frac{e^T}{1 - c^2 e^{2T}}.$$

Равенства (5.1.13), (5.1.14) означают фиксацию трех первых коэффициентов в разложении функции $S(\gamma)$ в тригонометрический ряд Фурье. Учтя это, представим $S(\gamma)$ в виде

$$S(\gamma) = T + \text{Re } F_T(e^{i\gamma}), \quad F_T(\zeta) = \frac{2\pi i D(T, \beta)}{\zeta} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \zeta^{-k}, \quad (5.1.16)$$

где $F_T(\zeta) = \chi_0(\zeta) - \chi_0(\infty)$ — функция аналитическая при $|\zeta| > 1$. Используя представление (5.1.16), запишем ограничение (5.1.15) в форме

$$T - c_0 + \sup_{\gamma} [\text{Re } F_T(e^{i\gamma})] \leq 0. \quad (5.1.17)$$

Далее, по лемме 4.1 для функции $F_T(\zeta)$ из (5.1.16) получим

$$\inf_{F_T} \sup_{\gamma \in [0, 2\pi]} \text{Re } F_T(\gamma) = D(T, \beta).$$

Покажем, что максимальное значение функционала T является решением T_* уравнения (5.1.11). Нетрудно видеть, что это уравнение имеет единственный корень при любом фиксированном значении β из интервала $[0, \pi/2]$.

Действительно, пусть для некоторой функции $S(\gamma)$ функционал T принимает значение $T_1 > T_*$. В силу строгой монотонности по T левой части (5.1.17) имеем

$$T_1 - c_0 + \sup_{\gamma} S(\gamma) \geq T_1 - c_0 + D(T_1, \beta) > T_* - c_0 + D(T_*, \beta) = 0.$$

Пришли к противоречию с ограничением (5.1.17).

Таким образом, при фиксированном β максимальное значение λ_∞^* скорости набегающего потока, для которого существуют профили с дозвуковым обтеканием, может быть теперь оценено так: $\lambda_\infty^* \leq \lambda_\infty^{(1)}(\beta)$, причем

$$\lambda_\infty^{(1)}(\beta) = \frac{\exp(T_*)}{1 - c^2 \exp(2T_*)},$$

где T_* — корень уравнения (5.1.11). Теорема доказана.

График зависимости $\lambda_\infty = \lambda_\infty^*(\beta)$ для $\varkappa = 7/5$ изображен на рис. 5.1. Эта линия разделяет область изменения параметров λ_∞, β на две зоны. Если о проектируемом профиле известно, что он обтекается потоком газа Чаплыгина с таким значением λ_∞ скорости на бесконечности и с таким теоретическим углом атаки β , что точка (β, λ_∞) лежит выше названной линии, то в рамках принятой модели профиль обязательно будет иметь сверхзвуковую зону. Если точка

(β, λ_∞) лежит ниже линии, то построение докритического профиля с указанными характеристиками возможно.

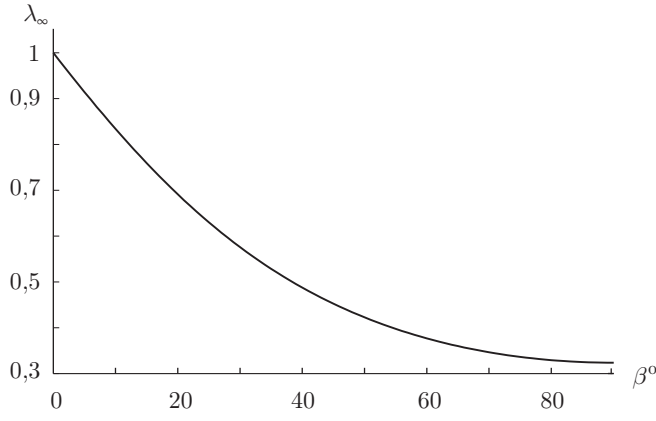


Рис. 5.1. График мажоранты $\lambda_\infty^* = \lambda_\infty^*(\beta)$ при $\kappa = 7/5$

Запишем теперь выражение коэффициента профильного сопротивления C_x . Рассмотрим сначала случай течения несжимаемой жидкости. Кроме того, с целью обеспечения безотрывного обтекания будем считать $\varepsilon = 2$, так как только в этом случае можно гарантировать безотрывность течения всюду на L_z .

Приближенный расчет величины \tilde{C}_x можно провести, используя известную формулу Сквайра–Юнга (например [68, с. 690])

$$\tilde{C}_x = 2 \left(\frac{v_*}{v_\infty} \right)^{3.2} \frac{\delta_0^{**}}{b}, \quad (5.1.18)$$

где v_* — величина скорости в задней кромке B , δ_0^{**} — суммарная толщина потери импульса ПС в этой точке. Из соотношений (1.3.4)–(1.3.7) следует, что

$$\delta_0^{**} = \delta_1^{**} + \delta_2^{**},$$

$$\delta_j^{**} = v_*^n \nu^{1/(m+1)} \left[\nu v_{tj}^{b-2} (\text{Re}_{tj}^{**})^a + aA \left| \int_{\Delta_j} |v(s)|^{b-1} ds \right| \right]^{1/a}, \quad (5.1.19)$$

где $j = 1, 2$, $n = -(6m-1)/(2m-1)$, $\Delta_1 = [s_{t1}, L]$, $\Delta_2 = [0, s_{t2}]$, s_{tj} — дуговые абсциссы точек перехода ламинарного ПС в турбулентный на верхней ($j = 1$) и нижней ($j = 2$) поверхностях профиля, а величины Re_{tj}^{**} могут быть вычислены, например, по формуле (1.3.7). Так как по предположению ПС является полностью турбулентным, $s_{t1} = 0$ и $s_{t2} = s_*$. Используя приведенные выражения, выразим величины \tilde{C}_x и K через функцию $P(\gamma)$.

По формуле (1.4.18) (при $\varepsilon = 2$) найдем

$$v[s(\gamma)] = 2v_\infty \cos \frac{\gamma - \beta}{2} \exp[P(\gamma)] \equiv v_\infty G(P, \beta; \gamma), \quad (5.1.20)$$

причем $v[s(\gamma)] > 0$ при $\gamma \in (-\beta, \gamma_*)$ (на верхней поверхности профиля), $v[s(\gamma)] < 0$ при $\gamma \in (\gamma_*, 2\pi - \beta)$ (на нижней поверхности), где $\gamma_* = \pi + \beta$. Далее, в силу (1.4.12), (1.4.13)

$$\frac{ds}{d\gamma} = -\frac{L}{I_0(P)} G_0(P; \gamma), \quad G_0(P; \gamma) \equiv 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \exp[-P(\gamma)]. \quad (5.1.21)$$

Используя соотношения (5.1.20) и (5.1.21), из (5.1.19) получим

$$\delta_j^{**} = v_*^n \nu^{1/(m+1)} \left[\frac{aALv_\infty^{b-1}}{I_0(P)} \right]^{1/a} [B_j(P, \beta)]^{1/a}, \quad (5.1.22)$$

где

$$B_j(P, \beta) = \int_{\tilde{\Delta}_j} G_1(P, \beta, b; \gamma) d\gamma, \quad (5.1.23)$$

$$\tilde{\Delta}_1 = [-\beta, \pi + \beta], \quad \tilde{\Delta}_2 = [\pi + \beta, 2\pi - \beta],$$

$$\begin{aligned} G_1(P, \beta, b; \gamma) &= G_0(P; \gamma) |G(P, \beta; \gamma)|^{b-1} = \\ &= 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \left| 2 \cos \frac{\gamma - \beta}{2} \right|^{b-1} \exp[(b-2)P(\gamma)]. \end{aligned} \quad (5.1.24)$$

Взаимосвязанные эмпирические постоянные $a = (m+1)/m$, $b = 2(4m+1)/(2m-1)$ и m определяются выбором критерия отсутствия отрыва турбулентного ПС (см. п. 1.3.1). Теперь из формул (1.1.7), (5.1.18), (5.1.22) и (5.1.23) найдем выражение для коэффициента профильного сопротивления:

$$\tilde{C}_x = 2v_*^{n+3,2} \nu^{1/(m+1)} \left[\frac{aAL}{I_0(P)} \right]^{1/a} b^{-1} v_\infty^{(b-1)/a-3,2} B_0(P, \beta), \quad (5.1.25)$$

$$B_0(P; \beta) = [B_1(P, \beta)]^{1/a} + [B_2(P, \beta)]^{1/a}.$$

Далее, следуя [68, п. 132] для получения расчетной формулы коэффициента сопротивления положим $n = -3,2$ (при различных m величина $n + 3,2$ незначительно отличается от нуля). В силу (4.1.9)

$$\tilde{C}_y = \frac{2\Gamma}{b} = 8\pi L \sin \beta / [bI_0(P)]. \quad (5.1.26)$$

Теперь из формул (5.1.25) и (5.1.26) нетрудно получить выражение для аэродинамического качества:

$$\begin{aligned} K = \frac{Y}{X} = \frac{C_y}{C_x} = \frac{\tilde{C}_y}{\tilde{C}_x} &= 4\pi v_\infty^{3,2-(b-1)/a} (aA)^{-1/a} (2 \operatorname{Re}_\infty)^{1/(m+1)} \times \\ &\times \frac{\sin \beta [I_0(P)]^{1/a-1}}{B_0(P; \beta)}, \end{aligned} \quad (5.1.27)$$

где число Рейнольдса $\text{Re}_\infty = v_\infty L / (2\nu)$. Наиболее простой вид функционала в правой части (5.1.27) соответствует выбору эмпирической постоянной $a = 1$ по Г. М. Бам-Зеликовичу. Напомним также, что для несжимаемого течения $v_\infty = 1$. В итоге получим

$$K = \frac{4\pi(2\text{Re}_\infty)^{1/(m+1)} \sin \beta}{AE_0(P; \beta)}, \quad (5.1.28)$$

$$E_0(P; \beta) = \int_0^{2\pi} G_1(P, \beta, b; \gamma) d\gamma. \quad (5.1.29)$$

Таким образом, при фиксированном значении Re_∞ для максимизации аэродинамического качества нужно минимизировать функционал $E_0(P; \beta) \cos \beta$ на допустимом множестве пар (P, β) . При этом для вычисления соответствующего максимального значения K необходимо выбрать взаимосвязанные эмпирические постоянные A , m и b . Различные варианты их выбора подробно описаны в п. 1.3.1. В частности, при любых значениях Re_∞

$$\begin{aligned} A = 0,00653, \quad b = 4,75 \quad \text{при} \quad m = 6; \\ A = 0,01256, \quad b = 4,86 \quad \text{при} \quad m = 4. \end{aligned} \quad (5.1.30)$$

Кроме того, в [68, п. 132] приведены следующие наборы эмпирических постоянных, рекомендуемые для получения расчетной формулы коэффициента сопротивления:

$$\begin{aligned} A = 0,0153, \quad m = 6, \quad b = 5 \quad \text{при} \quad \text{Re}_\infty \geq 5 \cdot 10^6; \\ A = 0,037, \quad m = 4, \quad b = 4,5 \quad \text{при} \quad \text{Re}_\infty < 5 \cdot 10^6. \end{aligned} \quad (5.1.31)$$

Из сравнения (5.1.30) и (5.1.31) следует, что наибольший разброс при одинаковых m наблюдается в значениях постоянной A .

На рис. 5.2 представлены результаты сравнения величин коэффициентов \tilde{C}_y , \tilde{C}_x , рассчитанных для профиля NASA 23015 (также изображен на рис. 5.2) по формулам (5.1.25), (5.1.26) с эмпирическими константами из (5.1.31) и на основе расчета ПС методом [110]. Угол атаки α варьировался в интервале $-5^\circ \leq \alpha \leq 5^\circ$. Соответствующие распределения скорости изображены на рис. 5.2, а (чтобы не загромождать изображение, практически сливающиеся участки распределений скорости в окрестностях передней и задней кромок не показаны). На рис. 5.2, б представлены поляры $\tilde{C}_y = \tilde{C}_y(\tilde{C}_x)$, рассчитанные методом Эпплера для $\text{Re}_\infty = 5 \cdot 10^5$ (кривая 1), $\text{Re}_\infty = 10^6$ (кривая 2) и $\text{Re}_\infty = 5 \cdot 10^6$ (кривая 3). Соответствующие значения коэффициентов \tilde{C}_y и \tilde{C}_x , найденные по формулам (5.1.25), (5.1.26), представлены ромбами, квадратами и треугольниками для $\text{Re}_\infty = 5 \cdot 10^5$, 10^6 и $5 \cdot 10^6$ соответственно. Максимальное различие названных значений не превысило 5%, что подтверждает приемлемость расчетных формул (5.1.25) и (5.1.26) с постоянными из (5.1.31).

Используя формулы (5.1.2) и (5.1.3), теперь нетрудно аналогично выводу представлений (5.1.25), (5.1.26), (5.1.28) записать функционал, выражающий аэродинамическое качество K для модели газа Чаплыгина.

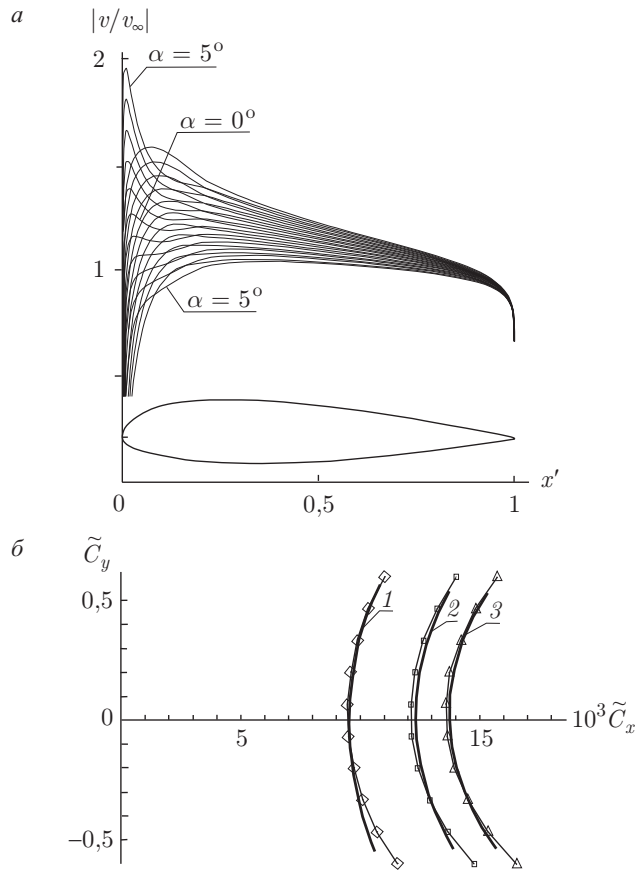


Рис. 5.2. Сравнение расчетных формул (5.1.25) и (5.1.26) с данными расчета ПС для профиля NACA 23015

В силу (5.1.3), (5.1.8) имеем

$$\lambda[s(\gamma)] = \frac{\lambda_\infty G(P, \beta; \gamma)}{T(P, \beta; \gamma)}. \quad (5.1.32)$$

Из (5.1.7), (5.1.9) получим

$$|s'(\gamma)| = \frac{L}{I_c(P)} G_0(P; \gamma) T(P, \beta; \gamma). \quad (5.1.33)$$

Как и выше, для полностью турбулентного ПС при $a = 1$, $n = -3,2$

$$\tilde{C}_x = 2\nu^{1/(m+1)} \lambda_\infty^{-3,2} A b^{-1} \int_0^{2\pi} |\lambda[s(\gamma)]|^{b-1} |s'(\gamma)| d\gamma.$$

Подставив сюда выражения (5.1.32) и (5.1.33) и используя первую формулу в (5.1.10), получим

$$\begin{aligned} \tilde{C}_y &= 8\pi L \sin \beta [b I_c(P)]^{-1}, \\ K &= \frac{4\pi \lambda_\infty^{4,2-b} \sin \beta (2 \operatorname{Re}_\infty)^{1/(m+1)}}{A E_c(P; \beta)}, \end{aligned} \quad (5.1.34)$$

где $\operatorname{Re}_\infty = \lambda_\infty L / (2\nu)$,

$$E_c(P; \beta) = \int_0^{2\pi} G_1(P, \beta, b; \gamma) [T(P, \beta; \gamma)]^{2-b} d\gamma. \quad (5.1.35)$$

Ясно, что при $c = 0$ (что соответствует переходу к течению несжимаемой жидкости) получим $T(P, \beta; \gamma) \equiv 1$ и функционалы (5.1.35) и (5.1.29) совпадут.

Замечание 5.1. Введем новую управляющую функцию

$$R(\gamma) = P(\gamma) + \ln T(P, \beta; \gamma).$$

Сделав такую замену, очевидно получим $I_c(P) = I_0(R)$; $E_c(P, \beta) = E_0(R, \beta)$. Следовательно, достаточно исследовать только свойства функционалов $I_0(P)$ и $E_0(P, \beta)$.

5.1.3. Свойства функционалов. Точные оценки. Функционал $I_0(P)$ подробно исследован в п. 4.1.2 и, в частности, из теоремы 4.2 следует точная оценка

$$I_0(P) \geq I_0(P_*) = 2\pi,$$

достижимая для $\varepsilon = 1$ при обтекании круга.

Исследуем теперь функционал $E_0(P, \beta)$. Введем функцию $Q(\gamma) = \ln G_1(P, \beta, b; \gamma)$. В выражении через $Q(\gamma)$ исследуемый функционал примет вид

$$E_0(P, \beta) = E(Q) \equiv \int_0^{2\pi} \exp[Q(\gamma)] d\gamma. \quad (5.1.36)$$

Ограничения (5.1.5) (при $c = 0$) приобретают форму

$$\int_0^{2\pi} Q(\gamma) d\gamma = 0, \quad \int_0^{2\pi} Q(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma = 2\pi i (b-1) \sin \beta. \quad (5.1.37)$$

Таким образом, при фиксированном β задача максимизации аэродинамического качества K без учета ограничения на максимум скорости

равносильна минимизации строго выпуклого функционала (5.1.36) при линейных ограничениях (5.1.37).

Аналогом теоремы 4.1 для функционала $E(T)$ служит теорема 5.2.

Теорема 5.2. *Функционал $E(Q)$ достигает глобального минимума в $L_2[0, 2\pi]$ при ограничениях (5.1.37) на функции*

$$Q_*(\gamma) = \ln[1 + (b-1)^2 \sin^2 \beta + 2(b-1) \sin \beta \sin \gamma] \quad (5.1.38)$$

при дополнительном ограничении

$$(b-1) \sin \beta \leq 1. \quad (5.1.39)$$

Доказательство. Как и в теореме 4.2, из необходимого условия экстремума расширенного функционала

$$\begin{aligned} \Psi(Q) = & \int_0^{2\pi} \exp[Q(\gamma)] d\gamma + \lambda_0 \int_0^{2\pi} Q(\gamma) d\gamma + \\ & + \lambda_1 \int_0^{2\pi} Q(\gamma) \cos \gamma d\gamma + \lambda_2 \left[\int_0^{2\pi} Q(\gamma) \sin \gamma d\gamma - 2\pi(b-1) \sin \beta \right], \end{aligned}$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ — неопределенные множители Лагранжа, найдем

$$Q_*(\gamma) = \ln[-\lambda_0 - \lambda_1 \cos \gamma - \lambda_2 \sin \gamma], \quad \lambda_0 < 0, \quad |\lambda_1 + i\lambda_2| \leq |\lambda_0|.$$

Постоянные λ_0, λ_1 и λ_2 должны быть подобраны так, чтобы обеспечить выполнение равенств (5.1.37) для экстремальной функции $Q_*(\gamma)$. В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \ln(1 + \mu_1 \cos \gamma + \mu_2 \sin \gamma) \cos \gamma d\gamma = 0, \\ & \int_0^{2\pi} \ln(1 + \mu_1 \cos \gamma + \mu_2 \sin \gamma) \sin \gamma d\gamma = 2\pi(b-1) \sin \beta, \\ & \mu_0 = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \ln(1 + \mu_1 \cos \gamma + \mu_2 \sin \gamma) d\gamma, \end{aligned} \quad (5.1.40)$$

где $\mu_0 = \ln |\lambda_0|$, $\mu_1 = \lambda_1/\lambda_0$, $\mu_2 = \lambda_2/\lambda_0$, $\lambda_0 \neq 0$. Интегралы в (5.1.40) вычисляются в явном виде. В результате имеем

$$\frac{\mu_1}{1 + \sqrt{1 - \mu_1^2 - \mu_2^2}} = 0, \quad \frac{\mu_2}{1 + \sqrt{1 - \mu_1^2 - \mu_2^2}} = (b-1) \sin \beta.$$

Значит, $\mu_1 = 0$ и $\mu_2 = 2(b-1) \sin \beta / [1 + (b-1)^2 \sin^2 \beta]$ при условии, что параметры b и β связаны неравенством (5.1.39). При невыполнении этого ограничения система уравнений (5.1.40) неразрешима.

Далее,

$$\mu_0 = -(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \ln \left[1 + \frac{2(b-1) \sin \beta}{1 + (b-1)^2 \sin^2 \beta} \sin \gamma \right] d\gamma.$$

Последний интеграл вычисляется в явном виде: $\mu_0 = \ln[1 + (b-1)^2 \sin^2 \beta]$. Таким образом, при $\beta \leq \beta^*$, $\beta^* = \arcsin[1/(b-1)]$, точное решение задачи минимизации функционала $E(Q)$ при ограничениях (5.1.37) имеет вид (5.1.38). Теорема доказана.

Опишем другой способ исследования системы уравнений (5.1.40). Возьмем аналитическую во внешности единичного круга функцию

$$\tilde{\chi}(\zeta) = 2 \ln \left(1 - \frac{r e^{i\varphi}}{\zeta} \right), \quad |r| \leq 1.$$

Равенство $Q_*(\gamma) = \operatorname{Re} \tilde{\chi}(e^{i\gamma})$ имеет место только в том случае, когда

$$-\lambda_0 = 1 + r^2, \quad \lambda_1 = 2r \cos \varphi, \quad \lambda_2 = 2r \sin \varphi.$$

При этом в окрестности $\zeta = \infty$ (всюду во внешности единичного круга)

$$\tilde{\chi}(\zeta) = 2 \left(-\frac{r e^{i\varphi}}{\zeta} + o(\zeta^{-1}) \right),$$

а функция $z_P(\zeta)$, дающая решение задачи — см. (1.4.9), примет вид

$$z_P(\zeta) = 2^{-b/(b-2)} u \int_{e^{-i\beta}}^{\zeta} \left(1 - \frac{e^{-i\beta}}{\zeta} \right) \exp \omega_*(\zeta) d\zeta,$$

$$\begin{aligned} \omega_*(\zeta) = & -\frac{2}{b-2} \ln \left(1 - \frac{r e^{i\varphi}}{\zeta} \right) + \frac{b-1}{b-2} \ln \left(1 + \frac{e^{i\beta}}{\zeta} \right) + \\ & + \frac{1}{b-2} \ln \left(1 - \frac{e^{-i\beta}}{\zeta} \right). \end{aligned} \quad (5.1.41)$$

Следовательно, в окрестности бесконечности

$$\ln \left(1 - \frac{e^{-i\beta}}{\zeta} \right) + \omega_*(\zeta) = \frac{2\zeta^{-1}}{b-2} [r e^{i\varphi} + (b-1)i \sin \beta] + o(\zeta^{-1})$$

и

$$z_P(\zeta) = 2^{-b/(b-2)} u \int_{e^{-i\beta}}^{\zeta} \left\{ 1 + \frac{2\zeta^{-1}}{b-2} [r e^{i\varphi} + (b-1)i \sin \beta] + o(\zeta^{-1}) \right\} d\zeta.$$

Из условия однозначности этой функции, эквивалентного системе уравнений (5.1.40), получим

$$r e^{i\varphi} + (b-1)i \sin \beta = 0. \quad (5.1.42)$$

Значит,

$$\lambda_1 = 2r \cos \varphi = 0, \quad \lambda_2 = -2r \sin \varphi = -2(b-1) \sin \beta,$$

$$\lambda_0 = -(1+r^2) = -[1+(b-1)^2 \sin^2 \beta],$$

и снова получили решение (5.1.38) при условии $|r| \leq 1$, эквивалентном (5.1.39).

Теперь, подставив экстремальную функцию $Q_*(\gamma)$ в (5.1.36), нетрудно записать минимальное значение функционала $E(Q)$:

$$E_* = E(Q_*) = 2\pi \exp \mu_0 = 2\pi [1 + (b-1)^2 \sin^2 \beta].$$

Следовательно, в силу (5.1.28)

$$K \leq K^*(\beta) \equiv \frac{2(2 \operatorname{Re}_\infty)^{1/(m+1)} \sin \beta}{A[1 + (b-1)^2 \sin^2 \beta]}.$$

Функция $K^*(\beta)$ монотонно возрастает на интервале $\beta \in [0, \beta_*]$. Отсюда и из теоремы 5.2 вытекает

Следствие 5.1. *Абсолютный максимум аэродинамического качества достигается при $\beta = \beta^*$ и равен*

$$K_{\max} = \frac{(2 \operatorname{Re}_\infty)^{1/(m+1)}}{A(b-1)}. \quad (5.1.43)$$

На рис. 5.3 приведены графики зависимости $K = K^*(\beta)$, соответствующие указанному выше выбору эмпирических постоянных и построенные при $\operatorname{Re}_\infty = 10^7$, $5 \cdot 10^6$ и 10^6 (линии 1–3). Абсолютные максимумы K_{\max} равны соответственно 180,4, 168 (при $\beta^* = 0,253$) и 140,6 (при $\beta^* = 0,289$).

Естественно возникает вопрос о том, какие профили соответствуют экстремальной кривой $K^*(\beta)$. Расчеты, выполненные в результате подстановки экстремальной функции в интегральное представление решения, показали, что точкам экстремальной кривой $K^*(\beta)$ отвечают физически нереальные решения (скорость на контуре обращается в бесконечность в передней и задней кромках, область течения является неоднолистной). В [90] приведен один из таких профилей, полученный для $\beta = 10^\circ$. Его контур имеет вертикальную ось симметрии, а его «нижняя» поверхность проходит выше, чем «верхняя». Учет условий простоты контура профиля значительно усложняет задачу и делает затруднительным получение аналитического результата для этого класса профилей. Поэтому представляет интерес оценить нижний предел абсолютного максимума аэродинамического качества, который достигим для физически реальных профилей. Для этого воспользуемся результатами [45], где проведена численная оптимизация формы крыловых профилей для получения глобального максимума аэродинамического качества при условиях отсутствия отрыва турбулентного ПС и простоты контура профиля. В частности, для $\operatorname{Re}_\infty = 10^7$ получено значение $K = 115,4$ при $\beta_{\max} = 14,3^\circ = 0,25$. Этот результат отмечен

на рис. 5.3 крестом. Сравнение с графиком 1 показывает, что величина β_{\max} для численно достигнутого глобального максимума хорошо согла-

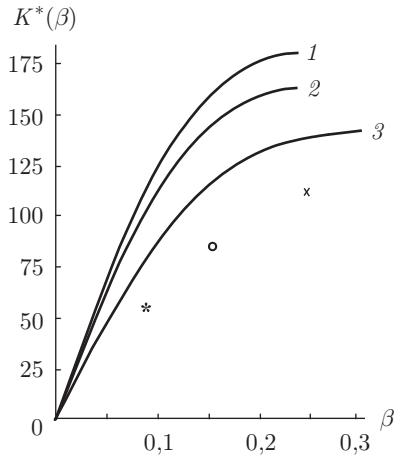


Рис. 5.3. Экстремальные зависимости $K^*(\beta)$ для чисел Рейнольдса $Re_\infty = 10^7; 5 \cdot 10^6; 10^6$ (линии 1–3)

суется с указанным выше теоретическим значением, но величина K на 49 % меньше теоретической. Другую нижнюю оценку глобального максимума аэродинамического качества можно получить из результатов [116], где при проектировании высоконесущих профилей с полностью турбулентным ПС для $Re_\infty = 10^6$ построен профиль с $K = 79,4$ при $\beta \approx 9^\circ = 0,157$ (кружок на рис. 5.3). Этот результат подтвержден экспериментом, а сравнение его с графиком 2 показывает, что реально достижимое при указанном β значение аэродинамического качества примерно на 43 % ниже теоретического значения 137,52.

Для получения физически реальных профилей близких к оптимальным аппроксимируем экстремальную функцию $\omega_*(\zeta)$ из (5.1.41) функцией

$$\omega(r_1, r_2; \zeta) = -\frac{2}{b-2} \ln \left(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta} \right) + \frac{b-1}{b-2} \ln \left(1 + \frac{r_2 e^{i\beta}}{\zeta} \right) + \frac{1}{b-2} \ln \left(1 - \frac{r_1 e^{-i\beta}}{\zeta} \right), \quad (5.1.44)$$

содержащей свободные параметры r_1, r_2 , $0 < r_1, r_2 < 1$, которые позволяют регулировать толщину профиля в окрестностях соответственно задней и передней кромок. Эти константы следует подбирать так, чтобы обеспечить простоту контура профиля и отсутствие отрыва потока с его поверхности. Величина ζ_0 зависит от r_1, r_2 и определяется так, чтобы удовлетворить условиям замкнутости контура. Аналогично выводу соотношения (5.1.42) получим $\zeta_0 = -d_1 - i d_2$,

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1 - r_1 - (b-1)(1-r_2)}{2} \cos \beta; \\ d_2 &= \frac{(b-1)(1+r_2) + r_1 - 1}{2} \sin \beta. \end{aligned} \quad (5.1.45)$$

Естественно, при $r_1 = r_2 = 1$ из (5.1.45) получим (см. (5.1.42)) $\zeta_0 = -i(b-1) \sin \beta$. Отметим, что $\omega(r_1, r_2; \zeta) \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$, поэтому первое условие разрешимости в (5.1.5) выполняется автоматически.

Еще одним существенным условием введения параметров r_1 и r_2 является неравенство $|\zeta_0| < 1$, гарантирующее отсутствие у функции $\omega(r_1, r_2; \zeta)$ особенностей во внешности единичного круга. Из (5.1.45) следует, что это условие принимает вид

$$[1 - r_1 - (b - 1)(1 - r_2)]^2 + 4r_2(b - 1)(b - 2 + r_1) \sin^2 \beta < 4. \quad (5.1.46)$$

В частном случае $r_1 = r_2 = 1$ в силу ограничения (5.1.39) неравенство (5.1.46) выполняется автоматически. Теперь из (5.1.44) и (5.1.45) следует

$$\begin{aligned} P_{r_1, r_2}(\gamma) \equiv -\operatorname{Re} \omega(r_1, r_2; e^{i\gamma}) &= \frac{\ln(1 + d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 \cos \gamma + 2d_2 \sin \gamma)}{b - 2} - \\ &- \frac{b - 1}{2(b - 2)} \ln[1 + 2r_2 \cos(\gamma - \beta) + r_2^2] - \\ &- \frac{1}{2(b - 2)} \ln[1 - 2r_1 \cos(\gamma + \beta) + r_1^2], \quad (5.1.47) \end{aligned}$$

В частности, можно использовать только один параметр $r_1 = r_2 = r \leq 1$. При $r = 1$ получим $d_1 = 0$, $d_2 = (b - 1) \sin \beta$. Отсюда с учетом указанной выше связи функций $P(\gamma)$ и $Q(\gamma)$ для последней, как и следовало ожидать, получается представление (5.1.38).

Таким образом, за счет выбора параметров r_1, r_2 с соблюдением ограничения (5.1.46) или только одного параметра r можно использовать семейства функций (5.1.47), являющихся приближениями (в указанном выше смысле) экстремальной функции (5.1.41) и попытаться получить физически реальные крыловые профили, обладающие повышенным аэродинамическим качеством.

На рис. 5.4 представлен профиль, построенный в [105] (см. также [36]) для $r_1 = 0,5$, $r_2 = 0,65$, $\beta = 0,087$ (5°), $\operatorname{Re}_\infty = 10^6$ следующим образом. По функции (5.1.44), аппроксимирующей экстремальную в указанном смысле, было восстановлено распределение скорости

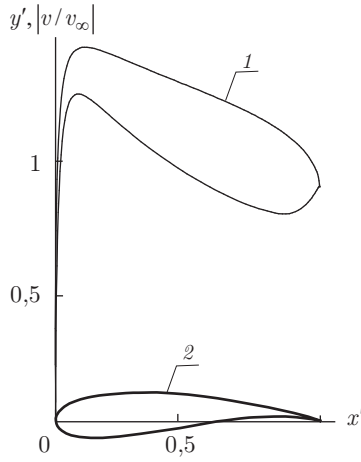


Рис. 5.4. Профиль с повышенным аэродинамическим качеством, построенный при $r_1 = 0,5$, $r_2 = 0,65$, $\beta = 0,087$ и $b = 4,5$

$v(s)$ по контуру искомого профиля (линия 1). По этому распределению была решена ОКЗА с учетом вязкости потока [56], причем для контроля точности расчет турбулентного ПС проводился двумя способами: методом Кочина–Лойцянского ([68, с. 608]) и методом Эпплера [110].

Оба метода дали близкие результаты и, в частности, показали отсутствие отрыва потока, что определило малую толщину вытеснения ПС. Соответствующий профиль с $t_{\max} = 16,5\%$ представлен контуром 2. При расчетном угле атаки $\alpha = 0,26^\circ$ он имеет $C_y = 0,61$, $C_x = 0,011$ и $K = 55,45$. На рис. 5.3 этому профилю соответствует звездочка. Сравнение с графиком 2 на рис. 5.3 показывает, что полученное аэродинамическое качество примерно на 35 % меньше теоретического максимального значения 84,78.

На рис. 5.5 представлены шкалы крыловых профилей с повышенным аэродинамическим качеством. Все они построены при $\beta = 0,087$ (5°) с использованием управляющей функции (5.1.47) при $b = 4,5$ и разных значениях параметров r_1 и r_2 , которые изменялись с шагом 0,1. Каждой строке и каждому столбцу на рис. 5.5 соответствуют значения r_1 и r_2 , отмеченные на горизонтальной и вертикальной осях (например, всей нижней строке соответствуют $r_1 = 0,1$ и переменные значения r_2). Для удобства сравнения все полученные профили изображены в системе декартовых координат, с хордой профилей на оси абсцисс, т.е. профили повернуты относительно задней кромки против хода часовой стрелки на величину α аэродинамического угла атаки. Длина хорды у всех профилей равна 1. Кружками на контурах обозначена передняя критическая точка (точка разветвления потока). Рассчитанные значения углов α (в радианах) для этих профилей и аэродинамического качества K при $Re_\infty = 10^6$ и соответствующих значениях эмпирических постоянных A и m из (5.1.31) в зависимости от r_1 и r_2 приведены ниже в таблицах. При увеличении r_1 и r_2 аэродинамическое качество возрастает, вплоть до ситуации, когда течение становится неоднолистным (соответствующие значения угла атаки и аэродинамического качества выделены полужирным шрифтом). Профиль (затемнен на рис. 5.5), который реализует однолистное течение и обладает максимально возможным значением аэродинамического качества, в рассматриваемом классе профилей, соответствует выбору $r_1 = 0,8$ и $r_2 = 0,5$ и имеет $K = 57,2$ при $Re_\infty = 10^6$. Лакуны в верхних частях столбцов на рисунках и в таблицах 5.1 и 5.2 (при $r_2 = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$ и $0,5$) объясняются тем, что для соответствующих им значений r_1 и r_2 нарушается условие (5.1.46).

Отметим, что в окрестности указанного оптимального решения расположены профили (заштрихованы), контуры которых имеют участки самопересекаемости в окрестности задней кромки размером 1–3 % длины хорды. Таковым, в частности, является профиль с параметрами $r_1 = 0,8$ и $r_2 = 0,6$, имеющий $K = 57,4$, но значительно отличающийся по форме от оптимального. В свою очередь, весьма близок по форме к нему профиль с параметрами $r_1 = 0,9$ и $r_2 = 0,6$, который имеет уже большее значение $K = 64,6$. С другой стороны, близок по форме к оптимальному неоднолистный профиль с параметрами $r_1 = 0,9$ и $r_2 = 0,5$, имеющий $K = 64,2$ и значительно отличающийся от двух последних неоднолистных профилей.

Все сказанное свидетельствует о том, что значение аэродинамического качества, близкое к максимальному на классе однолистных течений, может достигаться на профилях, значительно различающихся по форме, т.е. поверхность $K = K(r_1, r_2)$ в окрестности экстремума является очень полой. Отметим также, что приведенная шкала профилей соответствует изменению параметров r_1 и r_2 с шагом 0,1 и

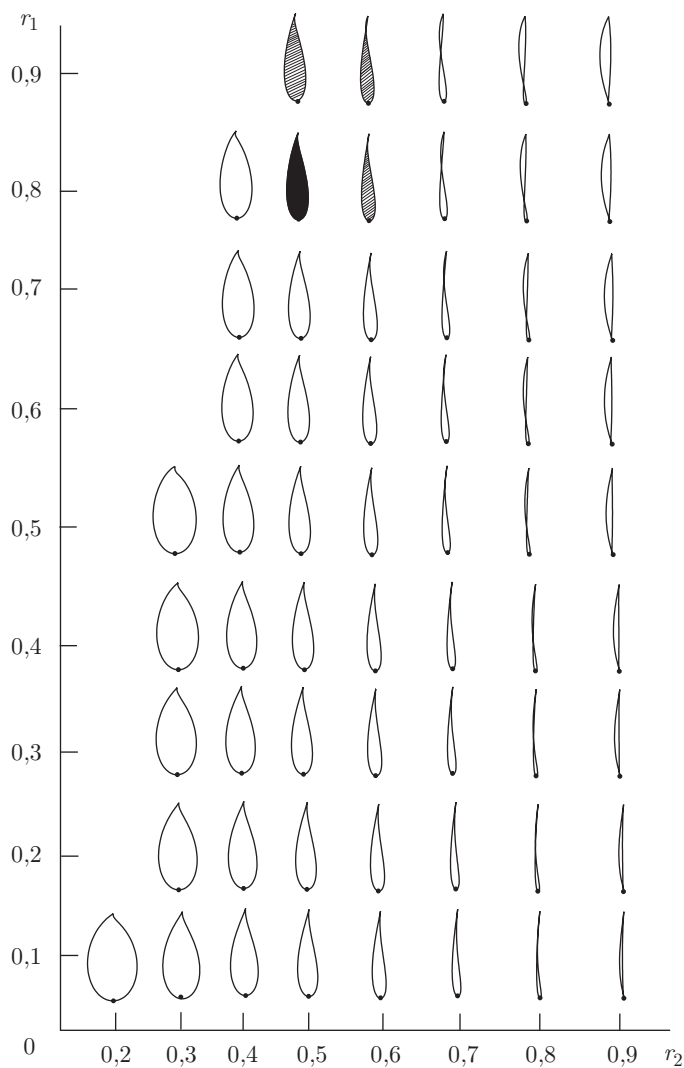


Рис. 5.5. Шкалы крыловых профилей с повышенным аэродинамическим качеством, построенных при $\beta = 0,087$, $b = 4,5$ и разных r_1 и r_2

описанные выше результаты могут быть несколько улучшены за счет уменьшения этого шага.

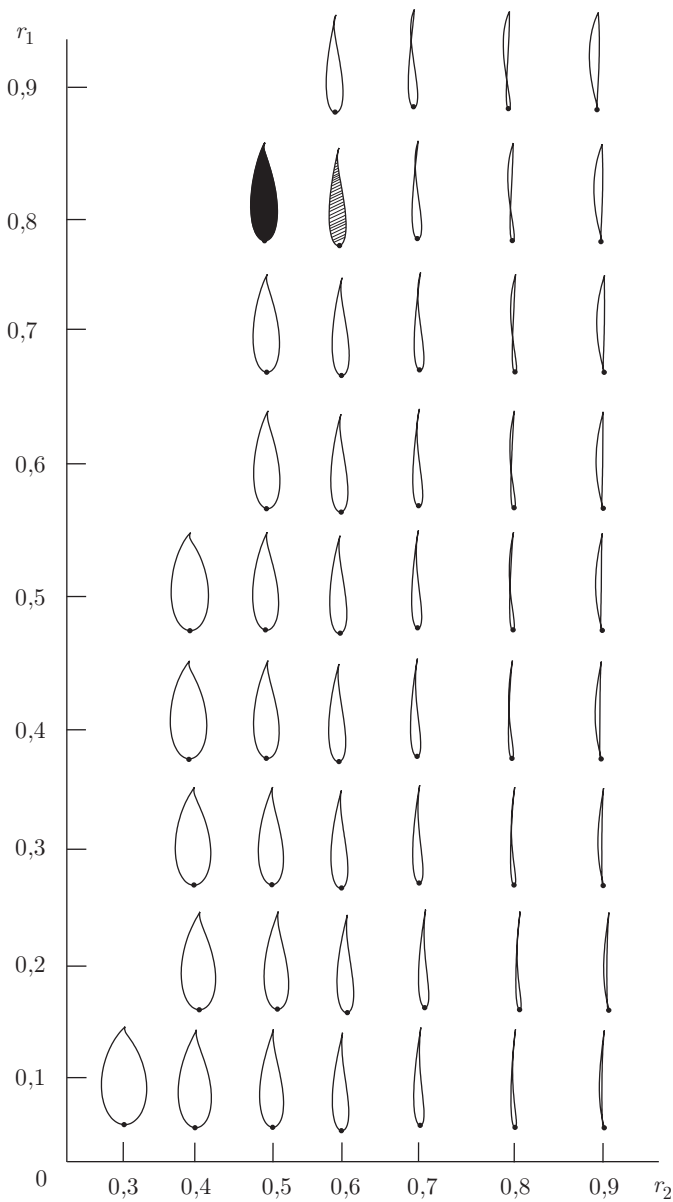


Рис. 5.6. Шкалы крыловых профилей с повышенным аэродинамическим качеством, построенных при $\beta = 0,087$, $b = 5$ и разных r_1 и r_2

Таблица 5.1

Рассчитанные значения (в радианах) угла атаки оптимизированных профилей в зависимости от параметров r_1 и r_2 при $Re_\infty = 10^6$, $A = 0,037$, $m = 4$, $\beta = 0,087$ и $b = 4,5$

α		r_1								
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
r_2	0,1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	0,2	-0,02	—	—	—	—	—	—	—	—
	0,3	-0,00	-0,01	-0,02	-0,03	-0,05	—	—	—	—
	0,4	0,00	0,00	-0,01	-0,01	-0,02	-0,03	-0,03	-0,04	—
	0,5	0,01	0,00	0,00	-0,01	-0,01	-0,01	-0,02	-0,02	-0,03
	0,6	0,01	0,01	0,00	0,00	-0,00	-0,01	-0,01	-0,01	-0,02
	0,7	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	-0,01	-0,01	-0,01
	0,8	0,02	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01
	0,9	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00

Таблица 5.2

Рассчитанные значения аэродинамического качества оптимизированных профилей в зависимости от параметров r_1 и r_2 при $Re_\infty = 10^6$, $A = 0,037$, $m = 4$, $\beta = 0,087$ и $b = 4,5$

K		r_1								
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
r_2	0,1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	0,2	18,0	—	—	—	—	—	—	—	—
	0,3	17,2	21,4	26,1	31,5	37,3	—	—	—	—
	0,4	16,5	20,7	25,5	30,9	36,9	43,3	50,1	57,0	—
	0,5	15,8	20,0	24,9	30,4	36,6	43,2	50,1	57,2	64,2
	0,6	15,2	19,4	24,4	30,0	36,3	43,0	50,1	57,4	64,6
	0,7	14,7	19,0	24,0	29,7	36,0	42,9	50,2	57,6	65,0
	0,8	14,1	18,4	23,5	29,3	35,8	42,9	50,3	57,8	65,3
	0,9	13,6	18,0	23,1	29,0	35,6	42,8	50,2	57,7	65,1

Интересным представляется следующее наблюдение: если профили, в верхних частях столбцов являются предельными в смысле однолистности области течения, то профили в нижних частях столбцов заведомо далеки от неоднolistных, но являются предельными в смысле выполнения условия (5.1.46).

Если $b = 5$ и по-прежнему $\beta = 0,087$, то функции семейства (5.1.47) и соответствующие формы оптимизированных профилей несколько изменятся (рис. 5.6). При этом существенно изменяются допустимые интервалы изменения параметров r_1 и r_2 , удовлетворяющих условию (5.1.46). Рассчитанные значения аэродинамического качества оптимизированных профилей для этого случая при $Re_\infty = 10^7$, $A = 0,0153$, $m = 6$, $\beta = 0,087$ и $b = 5$ приведены в табл. 5.3. Как и выше, пробелы соответствуют недопустимым значениями параметров r_1 и r_2 , а полужирным выделены значения аэродинамического качества для неоднолистных профилей.

Таблица 5.3

Рассчитанные значения аэродинамического качества оптимизированных профилей в зависимости от параметров r_1 и r_2 при $Re_\infty = 10^7$, $A = 0,0153$, $m = 6$, $\beta = 0,087$, $b = 5$

K		r_1								
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
r_2	0,1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	0,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	0,3	16,7	—	—	—	—	—	—	—	—
	0,4	15,9	21,2	27,7	35,5	44,6	—	—	—	—
	0,5	15,2	20,4	27,0	34,8	44,0	54,5	65,9	77,8	89,7
	0,6	14,5	19,7	26,3	34,2	43,5	54,2	65,8	78,0	90,2
	0,7	13,9	19,1	25,6	33,6	43,1	53,9	65,8	78,2	90,6
	0,8	13,3	18,5	25,0	33,1	42,7	53,7	65,7	78,3	91,0
	0,9	12,6	17,8	24,4	32,6	42,3	53,4	65,5	78,2	91,0

В данном случае оптимальным является затемненный профиль с параметрами $r_1 = 0,8$ и $r_2 = 0,5$, имеющий $K = 77,8$. Как и в предыдущем случае, в окрестности этой экстремали расположены почти однолистные решения с близким значением аэродинамического качества. Одно из них (заштрихованный профиль) соответствует выбору $r_1 = 0,8$ и $r_2 = 0,6$, область неоднолистности в окрестности задней кромки занимает 2 % хорды, а $K = 78,0$.

Отметим также, что профиль на рис. 5.4 (с $K = 55,45$ и $Re_\infty = 10^6$) при сравнении со шкалой профилей на рис. 5.5 не является наилучшим (максимальное аэродинамическое качество при том же числе Рейнольдса равно $K = 57,4$ для профиля с параметрами $r_1 = 0,8$ и $r_2 = 0,6$). Вместе с тем, как отмечено выше, названный профиль прошел дополнительную проверку путем расчета ПС и анализа безотрывности обтекания.

5.1.4. Точное решение. Способ нахождения экстремальной функции $Q^*(\gamma)$ при учета ограничения на максимум скорости полностью аналогичен изложенному в разд. 4.3 и опирается на теорему Куна–Таккера. В результате получим $Q_*(\gamma) = \ln g(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu^*(\gamma); \gamma)$, где

$$g(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu^*(\gamma); \gamma) \equiv \mu_0 + \mu_1 \cos \gamma + \mu_2 \sin \gamma - \mu^*(\gamma) \geq 0,$$

$\mu_0 > 0$, μ_1 и μ_2 — неопределенные множители, а неотрицательная функция (множитель Куна–Таккера)

$$\mu^*(\gamma) = \max \{0, \mu_0 + \mu_1 \cos \gamma + \mu_2 \sin \gamma - v_{\max}^{b-2} M(\gamma, \beta)\}.$$

Как и в разд. 4.3, $\mu_1 = 0$, а система уравнений для нахождения μ_0 и μ_2 такова:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \ln g(\mu_0, 0, \mu_2, \mu^*(\gamma); \gamma) d\gamma &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \ln g(\mu_0, 0, \mu_2, \mu^*(\gamma); \gamma) \sin \gamma d\gamma &= 2\pi(b-1) \sin \beta. \end{aligned} \quad (5.1.48)$$

При этом соответствующая $Q_*(\gamma)$ экстремальная функция

$$P_*(\gamma) = \ln \min \left\{ \left[\frac{\mu_0 + \mu_2 \sin \gamma}{M(\gamma, \beta)} \right]^{1/(b-2)}, v_{\max} \right\} - \ln \left| 2 \cos \frac{\gamma - \beta}{2} \right|,$$

а распределение скорости

$$|v_*(\gamma)| = \min \left\{ v_{\max}, \left[\frac{\mu_0 + \mu_2 \sin \gamma}{M(\gamma, \beta)} \right]^{1/(b-2)} \right\}, \quad (5.1.49)$$

где μ_0 и μ_2 — решение системы уравнений (5.1.48). Из (5.1.49) видно, что функция $v_*(\gamma)$ не имеет нулей (в том числе и в передней критической точке) и, следовательно, не попадает в допустимый класс (так же, как $P_*(\gamma)$ из-за логарифмических особенностей не попадает в допустимый класс гёльдеровских управляющих функций). Поэтому найденный минимум

$$\begin{aligned} E_* &= \int_0^{2\pi} \exp Q_*(\gamma) d\gamma = \\ &= 2\pi \mu_0 - \int_0^{2\pi} \max \{0, \mu_0 + \mu_2 \sin \gamma - v_{\max}^{b-2} M(\gamma, \beta)\} d\gamma, \end{aligned}$$

целевого функционала можно использовать лишь для оценки аэродинамического качества K сверху — см. (5.1.28):

$$K \leq \tilde{K} \equiv \frac{4\pi \sin \beta (2 \operatorname{Re}_\infty)^{1/(m+1)}}{A E_*}.$$

Для сравнения функций $K^*(\beta)$ и $\tilde{K}(\beta)$ система уравнений (5.1.48) решалась численно при условии (5.1.37) в диапазоне $v_{\max} \in [1, 1, 4]$, а затем вычислялась величина E_* . Установлено, что неравенство $K^*(\beta) \leq \tilde{K}(\beta)$ выполняется при любых значениях параметров β и v_{\max} из интервалов их определения, причем отношение $K^*(\beta)/\tilde{K}(\beta)$ принимает значения 0,5–0,6. Таким образом, в качестве верхней оценки аэродинамического качества целесообразно использовать функцию $K^*(\beta)$, что и сделано выше.

5.1.5. Условия безотрывности обтекания. Условия безотрывности обтекания накладывают дополнительное ограничение на распределение скорости $\lambda[s(\gamma)]$, и, следовательно, на управляющую функцию $P(\gamma)$. Выразим сначала это ограничение в случае $c^2 = 0$, воспользовавшись критериями безотрывности, подробно описанными в п. 1.3.1. Кроме того, по-прежнему будем считать $\varepsilon = 2$, так как только в этом случае можно гарантировать безотрывность течения всюду на L_z .

В силу теоремы 1.1 для обеспечения безотрывного обтекания достаточно потребовать выполнения неравенства (1.3.8), где формпараметр из формулы (1.3.5) соответствует турбулентному ПС ($s_{tj} = s_*$, $C_j = 0$ при $j = 1, 2$). Подставив в указанное неравенство выражение (1.4.18) для скорости потока через управляющую функцию $P(\gamma)$ и считая эту функцию гладкой, после несложных вычислений получим условие безотрывности в виде

$$(-1)^j \left[P'(\gamma) - 0,5 \operatorname{tg} \frac{\gamma - \beta}{2} \right] \geq g_{0j} G_2(P, \beta; \gamma), \quad j = 1, 2, \quad (5.1.50)$$

где

$$\gamma \in [-\beta, \gamma_*] \quad \text{при } j = 1, \quad \gamma \in [\gamma_*, 2\pi - \beta] \quad \text{при } j = 2,$$

$$G_2(P, \beta; \gamma) = G_1(P, \beta, b; \gamma) \left| \int_{\gamma_*}^{\gamma} G_1(P, \beta, b; \gamma) d\gamma \right|^{-1},$$

функция $G_1(P, \beta, b; \gamma)$ определена в (5.1.24). Далее, постоянные $g_{0j} \geq g_0$, где константа $g_0 = f_0/a$ связана с методом расчета ПС. В частности, $g_0 = -5,13$ по Кочину–Лойцянскому, $g_0 = (-4,5) - (-3,8)$ по Прандтлю–Бури, $g_0 = (-2,6) - (-1,7)$ по Лойцянскому и $g_0 = (-0,8) - (-0,7)$ по Бам-Зеликовичу. Условие (5.1.50) вместе с равенствами (5.1.5) определяет множество U допустимых функций $P(\gamma)$. В отличие от линейных ограничений (5.1.5) неравенство (5.1.50) весьма сложное, в частности, открыт вопрос о выпуклости множества U . В качестве упрощенных условий безотрывности можно использовать ограничения, определяющие некоторую аппроксимацию множества U . Простейшими из них являются неравенства

$$(-1)^j \left[P'(\gamma) - 0,5 \operatorname{tg} \frac{\gamma - \beta}{2} \right] \geq -D_j, \quad j = 1, 2, \quad (5.1.51)$$

где D_1, D_2 — положительные постоянные. Отметим, что при $D_j = 0$ соотношения (5.1.51) дают необходимое и достаточное условие монотонности функции $v(s)$ на соответствующих поверхностях L_z и, следовательно, являются точными, если отыскивается решение с монотонным распределением скорости на одной из поверхностей профиля. Ограничения (5.1.51) сохраняют выпуклость множества допустимых решений, которое обозначим U_1 и гарантируют существование и единственность на U_1 точки минимума строго выпуклого функционала $I_0(P)$. При этом существенным является вопрос об оптимальном выборе постоянных D_1 и D_2 , так как при любых значениях этих постоянных $U \cap U_1 \neq \emptyset$. Следовательно, речь идет о наилучшей аппроксимации множества U множеством U_1 в окрестности точки минимума функционала I_0 . Один из алгоритмов построения такой аппроксимации описан в работе [44]. Его реализация связана с решением большого числа оптимизационных задач, но на каждом шаге итераций в силу выпуклости множества U_1 и строгой выпуклости функционала $I_0(P)$ гарантированы существование и единственность экстремальной функции. Расчеты показали, что профили, полученные в общем случае и при аппроксимации (5.1.51), практически совпадают, если отыскивается решение с монотонным распределением скорости на одной из его поверхностей (т.е. $g_{0j} = 0$ или $D_j = 0$ при $j = 1$ или $j = 2$). Следовательно, названная аппроксимация является в данном случае точной.

В случае дозвукового течения газа, используя выражение (5.1.32) для скорости потока, выражение (5.1.33) и условие (1.3.8) безотрывности турбулентного ПС, при $\varepsilon = 2$ снова получим неравенство вида (5.1.50), где функцию $P(\gamma)$ нужно заменить на $P(\gamma) + \ln T(P, b; \gamma)$.

Далее, хорошо известно, что у безотрывно обтекаемых крыловых профилей, обладающих хорошими аэродинамическими характеристиками при расчетном угле атаки, даже при небольших его изменениях может произойти ухудшение этих характеристик из-за возникающего отрыва потока. Поэтому важно обеспечить безотрывное обтекание не только на расчетном угле атаки, но и в некотором диапазоне углов атаки.

Как показано в п. 1.3.2, безотрывность обтекания профиля полностью турбулентным потоком несжимаемой жидкости в диапазоне углов атаки $\delta = \alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha \in [\alpha_2, \alpha_1]$, гарантируется одновременным выполнением неравенств

$$f(v_1; s_{*1}, s) \geq f_0, \quad s \in [s_{*1}, L]; \quad f(v_2; s_{*2}, s) \geq f_0, \quad s \in [0, s_{*2}].$$

Здесь $v_j(s)$ — распределения скорости на верхней ($j = 1$) и нижней ($j = 2$) поверхностях профиля при его обтекании под углами атаки α_1 и α_2 соответственно; s_{*j} — дуговые абсциссы точек разветвления потока при $\alpha = \alpha_j$. Формпараметр $f(v_j; s_{*j}, s)$ определен формулой (1.3.13). Перейдя в ней к распределению скорости как функции полярного угла γ (см. (5.1.3)) и учтя, что абсциссам s_{*j} соответствуют углы $\gamma_{*j} = \pi + 2\beta_j$, получим условие безотрывного обтекания всей

поверхности профиля полностью турбулентным потоком в диапазоне углов $\delta = \alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2$, записанное через управляющую функцию $P(\gamma)$:

$$(-1)^j \left[P'(\gamma) - 0,5 \operatorname{tg} \frac{\gamma - \beta}{2} \right] \geq g_{0j} G_2(P, \beta_j; \gamma), \quad (5.1.52)$$

$$\gamma \in [0, \gamma_{*1}] \quad \text{при} \quad j = 1; \quad \gamma \in [\gamma_{*2}, 2\pi] \quad \text{при} \quad j = 2.$$

Это условие при некотором значении угла $\beta = \beta_0$ из диапазона $\delta = \beta_1 - \beta_2$ может быть использовано как дополнительное при решении оптимизационных задач. При этом в рамках самого диапазона $[\beta_2, \beta_1]$ может быть рассмотрен случай, когда угол $\beta = \beta_0$ для целевого функционала является параметром оптимизации.

5.1.6. Условия однолиственности решения. Очевидным и относительно несложным условием простоты контура L_z является требование положительности толщины профиля, которое в симметричном случае принимает наиболее простой вид. Далее, так как нарушение однолиственности области течения происходит, как правило, в окрестности задней кромки профилей, другим приближенным условием простоты L_z может служить неравенство, обеспечивающее положительность толщины в этой части профиля. Все эти неравенства могут быть представлены в виде ограничения на управляющую функцию $P(\gamma)$, однако громоздкость соответствующих выражений приводит к большим трудностям при расчетах. Поэтому возникает необходимость в простых и в то же время достаточно эффективных приближенных условиях однолиственности. Приведем одно из них.

При анализе распределения скорости

$$v_0(\gamma) = \begin{cases} v_{01}(\gamma), & \gamma \in [0, \pi], \\ v_{02}(\gamma), & \gamma \in [\pi, 2\pi], \end{cases}$$

соответствующего бесциркуляционному обтеканию произвольного профиля, было замечено, что графики функций $v_{01}^*(\gamma) = v_{01}(2\pi - \gamma)$ и $v_{02}^*(\gamma) = v_{02}(\gamma) + 2v_0(0)$, $\gamma \in [\pi, 2\pi]$, в какой-то мере повторяют форму самого профиля, особенно в окрестности задней кромки, где, как правило, происходит самопересечение контура (функции $v_{0j}(\gamma)$ и $v_{0j}^*(\gamma)$ для профиля Жуковского с относительной толщиной $t_{\max} = 18\%$ представлены в [35, п. 45]). Наглядной иллюстрацией этому же факту является распределение скорости на пластине, обтекаемой под нулевым углом атаки: $v_{01}^*(\gamma) = v_{02}^*(\gamma) = \operatorname{const}$ и названный график является отрезком прямой. Анализ большого числа однолистных контуров показал, что графики функций $v_{0j}^*(\gamma)$ пересекаются лишь в двух точках: $\gamma = 2\pi$ и $\gamma = \gamma^*$, причем график $v_{02}^*(\gamma)$ на интервале $[\gamma^*, 2\pi]$ лежит ниже $v_{01}^*(\gamma)$. Исходя из этого эмпирического наблюдения, можно предположить, что искомый контур L_z будет простым при выполнении

неравенства

$$v_{01}(\gamma) - v_{02}(2\pi - \gamma) > 2v_0(0), \quad \gamma \in [0, \gamma_0], \quad (5.1.53)$$

где $\gamma_0 \leq \pi$ — некоторая фиксированная величина. Используя формулу (5.1.20) при $\beta = 0$, из (5.1.53) выведем неравенство

$$\Upsilon(P; \gamma) > 0, \quad \gamma \in [0, \gamma_0], \quad (5.1.54)$$

где

$$\Upsilon(P; \gamma) = \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \{\exp[P(\gamma)] + \exp[P(2\pi - \gamma)]\} - 2\exp[P(0)],$$

причем для симметричных профилей оно упростится:

$$P(\gamma) - P(0) > \ln \left[\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \right], \quad \gamma \in [0, \gamma_0].$$

Перепишав (5.1.54) в виде

$$\min_{\gamma \in [0, \gamma_0]} \Upsilon(P; \gamma) > 0$$

и сравнив его с условием (1.4.23), убедимся, что неравенство (5.1.54) является более жестким требованием по сравнению с необходимым условием однолистности (1.4.23).

Результаты вычислений показали, что применение ограничения (5.1.54) дает достаточно надежные результаты при сравнительно небольших затратах машинного времени.

Таким образом, в силу соотношений (5.1.10), (5.1.27) при фиксированных значениях L , ρ_∞ и v_∞ (или λ_∞) для максимизации величин Y , K и минимизации X нужно минимизировать соответственно функционалы $I_0(P) \operatorname{cosec} \beta$, $E_0(P; \beta) \operatorname{cosec} \beta$ и $E_0(P; \beta)/I_0(P)$ для несжимаемого потока и те же функционалы при замене управляющей функции $P(\gamma)$ на $P(\gamma) + \ln T(P, \beta; \gamma)$ для полностью турбулентного течения газа на множестве U управляющих гёльдеровских функций $P(\gamma)$, которые помимо линейных ограничений (5.1.5) должны удовлетворять условию безотрывности обтекания (5.1.50) или (5.1.52) и гарантировать физическую реализуемость получаемого решения, причем $\beta \in [0, \beta^*(\lambda_\infty)]$ является параметром оптимизации.

В общем случае задачи минимизации указанных функционалов на множестве U как при фиксированном, так и при переменном значении β и при дополнительном ограничении, выраженном условием безотрывности обтекания, решены численно [44–46]. Получены экстремальные функции и построены соответствующие им крыловые профили. Несколько характерных результатов приведено ниже.

На множество U могут быть дополнительно наложены ограничения, связанные с геометрией профиля (например одно из условий однолистности), а также ограничения на его аэродинамические параметры (в частности, на коэффициенты C_y и C_x (см. ниже (5.3.1), (5.3.2)), причем каждому из последних может соответствовать, как и целевому

функционалу, свое значение угла $\beta \in [\beta_2, \beta_1]$. Это позволит найти крыловые профили, обладающие требуемыми свойствами во всем диапазоне безотрывного обтекания.

5.2. Профили максимальной подъемной силы в газе Чаплыгина

5.2.1. Точное решение основной вариационной ОКЗА. Постановка основной вариационной ОКЗА для модели газа Чаплыгина аналогична постановке для модели ИНЖ с той лишь разницей, что класс \mathbf{L} рассматриваемых контуров задается вместо (1.4.9) с помощью интегрального представления (5.1.2). Построим точное решение этой задачи в случае $\varepsilon = 1$, следуя схеме, изложенной в разд. 4.3. Расширенный функционал имеет тот же вид с заменой $I_0(P)$ на $I_c(P)$, из необходимого условия экстремума этого функционала найдем соотношение, определяющее вид экстремальной функции $P^*(\gamma)$:

$$-e^{-P^*(\gamma)} - c^2 e^{P^*(\gamma)} M^2(\gamma, \beta) + g(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu; \gamma) = 0,$$

откуда следует

$$P^*(\gamma) = -\ln \Phi(\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu\}; \gamma), \quad (5.2.1)$$

$$\Phi(\{\bullet\}; \gamma) = \frac{g(\{\bullet\}; \gamma) + \sqrt{g^2(\{\bullet\}; \gamma) - 4c^2 M^2(\gamma, \beta)}}{2}.$$

Функция $\mu^*(\gamma)$, соответствующая точному решению, принимает в данном случае вид

$$\mu^*(\gamma) = \max \left\{ 0, \sqrt{1 + 4c^2} M(\gamma, \beta) - \omega(\gamma) - \mu_1 \cos \gamma \right\}, \quad (5.2.2)$$

а распределение скорости, соответствующее экстремальной функции $P^*(\gamma)$, таково:

$$|\lambda^*(\gamma)| = \min \left\{ 1; \left| \frac{M(\gamma, \beta)}{\sqrt{g^2(\mu_0, \mu_1, \mu_2, 0; \gamma) - 4c^2 M^2(\gamma, \beta)}} \right| \right\}.$$

Естественно, из выписанных выражений при $c^2 = 0$ получаются формулы (4.3.3) и (4.3.4). Далее, система уравнений для нахождения μ_0 , μ_1 и μ_2 получается из (5.1.5) подстановкой экстремальной функции (5.2.1) с учетом выражения (5.2.2) при соответствующих значениях B_0 , B_1 и B_2 :

$$\int_0^{2\pi} \ln[\Phi(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu^*(\gamma); \gamma)] d\gamma = B_0,$$

$$\int_0^{2\pi} \ln[\Phi(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu^*(\gamma); \gamma)] e^{i\gamma} d\gamma = B_1 + i B_2.$$

Отметим, что функция (5.2.2), как и в случае ИНЖ, обладает свойством симметрии $\mu^*(\pi - \gamma)_{\mu_1=\alpha} = \mu^*(\gamma)_{\mu_1=-\alpha}$. Напомним, что это свойство позволило доказать симметричность оптимального решения в случае модели ИНЖ [41]. Существенным при доказательстве этого факта было равенство нулю правой части в (4.3.7). В данном случае свойство симметрии также имеет место, так как $B_1 = 0$.

Итак, получены представление точного решения вариационной ОКЗА для модели газа Чаплыгина и система уравнений для нахождения параметров.

5.2.2. Оптимизированные формы, полученные на основе точных и численных решений. Проведенные расчеты и результаты построения точных решений для разных наборов β и v_{\max} подтвердили все тенденции изменения оптимизированных форм, установленные в рамках модели ИНЖ. Так, на рис. 5.7 и рис. 5.8 приведены примеры оптимальных контуров, полученных на основе точных решений при разных числах Маха M_∞ для $\beta = 0,1$ ($\sim 5,7^\circ$), а также соответствующие распределения скорости. Затемненными кружками обозначены точки разветвления и схода потока. Видно, что оптимальные

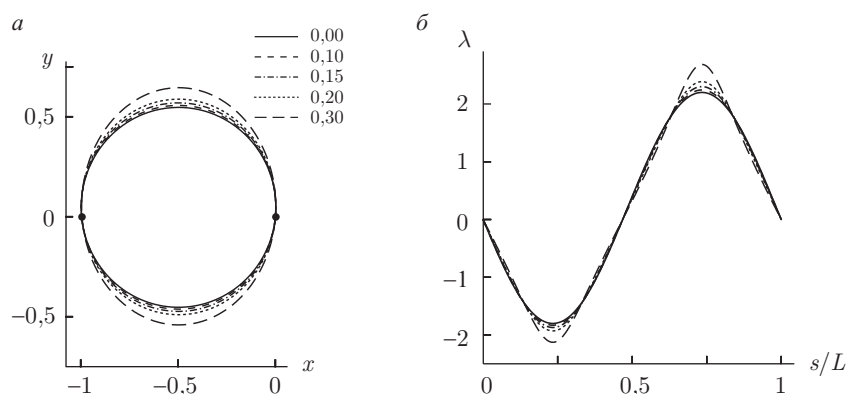


Рис. 5.7. Оптимальные контуры, полученные при $\beta = 0,1$ для разных значений M_∞ (а) и соответствующие распределения приведенной скорости (б)

контуры обладают свойством симметрии, как и в случае ИНЖ, тогда как толщина профилей изменяется в зависимости от числа Маха M_∞ ; характеристики оптимальных профилей приведены в табл. 5.4. Сплошной линией на рис. 5.7 изображена окружность — оптимальное решение в потоке ИНЖ. С увеличением числа M_∞ оптимальные контуры все больше отличаются от окружности (штриховая, штрихпунктирная и пунктирная линии), а толщина соответствующих профилей с ростом M_∞ сначала увеличивается (до значения $M_\infty = 0,328$, см. табл. 5.4), а затем уменьшается, при этом верхняя поверхность оптимальных профилей становится более полой быстрее, чем нижняя. Отметим также,

что при $\beta = 0,1$ и $M_\infty < 0,328$ максимальное значение скорости на оптимальных профилях не достигает 1, т.е. ограничение на максимум скорости выполняется автоматически. Кроме того, эти результаты практически совпадают с численными результатами, полученными ранее и представленными в [46].

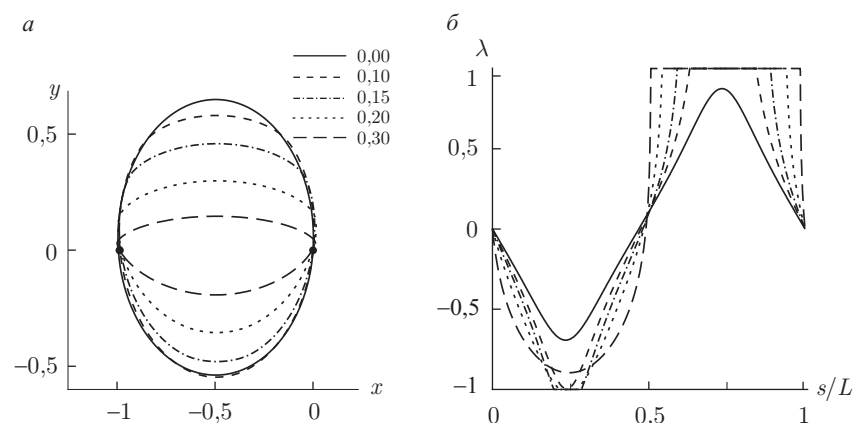


Рис. 5.8. Оптимальные контуры, полученные при $\beta = 0,1$ для разных значений M_∞ (а) и соответствующие распределения скорости (б)

Таблица 5.4

Характеристики точных оптимальных решений для $\varepsilon = 1$ при $\beta = 0,1$ и разных M_∞

M_∞	t_{\max}	α°	C_y	Υ^*
0,00	1,0000	5,7296	0,7987	0,1997
0,10	1,0186	5,8659	0,8016	0,2004
0,15	1,0429	6,0408	0,8053	0,2013
0,20	1,0781	6,2947	0,8105	0,2026
0,30	1,1867	9,2984	0,8256	0,2064
0,328	1,2135	11,9871	0,8309	0,2077
0,40	1,1281	15,1600	0,8438	0,2109
0,45	0,9467	12,1129	0,8473	0,2118
0,50	0,7366	7,9666	0,8447	0,2112
0,60	0,4094	2,3608	0,8090	0,2023

Случай $M_\infty = 0,328$ представлен на рис. 5.9 (оптимальный профиль — контур 2); хордовая диаграмма скорости (линия 1) достигает предельного значения $\lambda_{\max} = 1$ в единственной точке контура; точки

разветвления и схода потока отмечены затемненными кружками. На основании табл. 5.4 можно сделать следующее наблюдение. При росте M_∞ до определенного значения монотонно возрастают величины t_{\max} , α , C_y и, соответственно, Υ^* ; затем происходит монотонное убывание этих характеристик. Как отмечено выше, для максимальной толщины t_{\max} таким предельным значением при $\beta = 0,1$ служит $M_\infty = 0,328$.

Так как нашей целью является максимизация коэффициента C_y , интересно проанализировать отмеченное свойство монотонности этой характеристики во всем интервале изменения теоретического угла атаки. Для этого при разных значениях β были построены зависимости $C_{y \max} = C_{y \max}(M_\infty)$ максимального значения $C_{y \max}$ коэффициента подъемной силы от числа Маха M_∞ набегающего потока, характеризующие оптимизированные решения. Эти зависимости изображены на рис. 5.10 и рис. 5.11. На первом представлен весь интервал $[0, 90^\circ]$ изменения β . На втором подробно проанализирован интервал $[0, 20^\circ]$. Левые концы сплошных линий соответствуют кругу в потоке ИНЖ, а правые — дуге окружности.

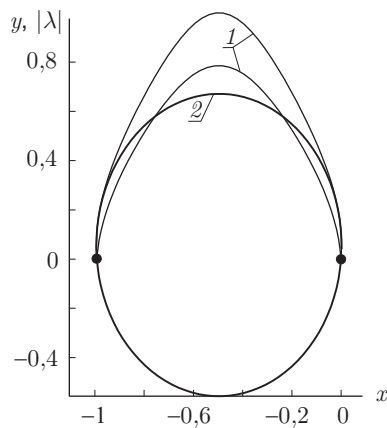


Рис. 5.9. Оптимальный профиль (2) и хордовая диаграмма скорости (1) при $\beta = 0,1$ и $M_\infty = 0,328$

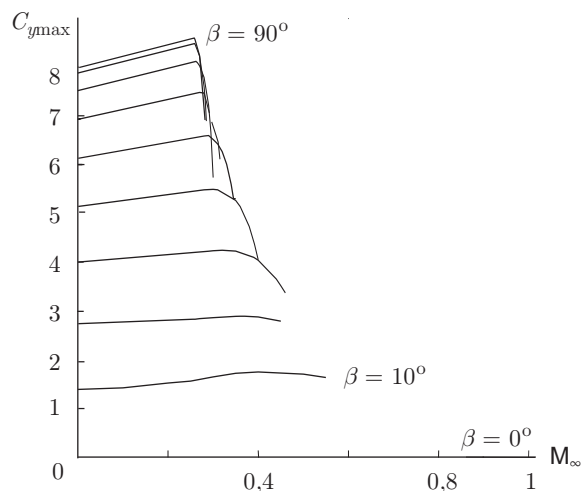


Рис. 5.10. Зависимости $C_{y \max} = C_{y \max}(M_\infty)$ для разных $\beta \in [0, 90^\circ]$ с шагом 10°

При дальнейшем увеличении M_∞ получили неоднолистные области течения.

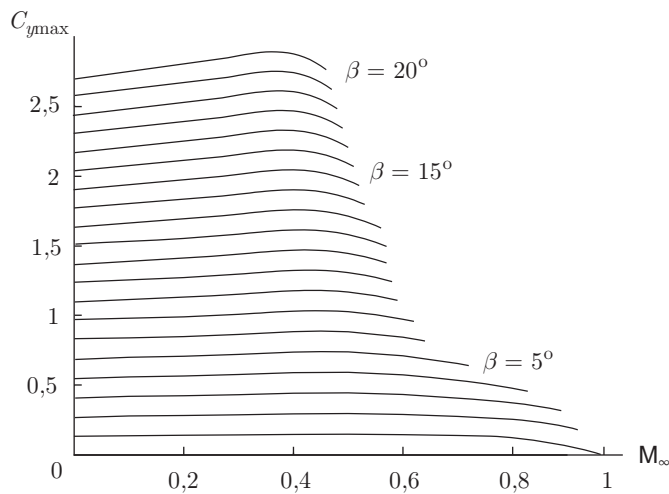


Рис. 5.11. Зависимость $C_{y\max} = C_{y\max}(M_\infty)$ для разных $\beta \in [0, 20^\circ]$ с шагом 1°

Рис. 5.12–рис. 5.15 иллюстрируют отмеченные выше тенденции изменения формы и параметров оптимальных профилей. На них изображены оптимальные профили (контур 2) и соответствующие хордовые диаграммы скорости (линии 1) для разных наборов параметров

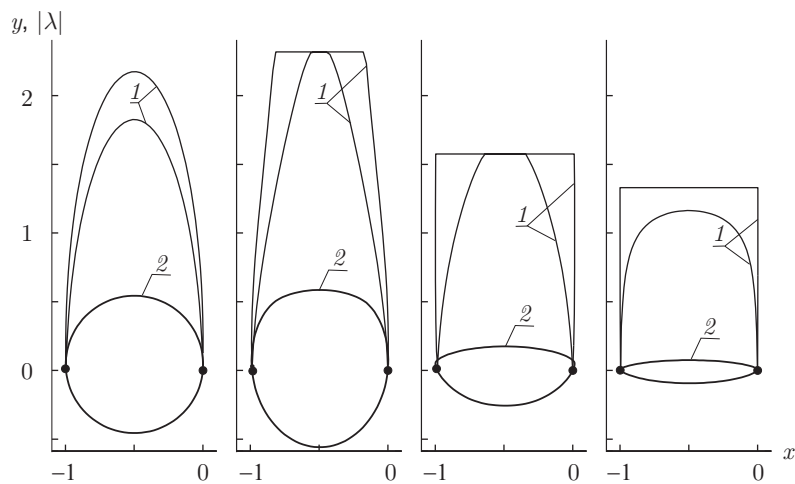


Рис. 5.12. Оптимальные контуры, соответствующие точному решению, при $\varepsilon = 1$, $\beta = 5^\circ$ и $M_\infty = 0,0001; 0,4; 0,6; 0,721$

M_∞ и β . Кругами обозначены точки разветвления и схода потока. Отметим, что при малых β имеются оптимальные профили с двумя полками (см. рис. 5.12). В табл. 5.5 представлены характеристики оптимальных решений, причем для каждого фиксированного β указано предельное значение M_∞ , соответствующее переходу к неоднолистной

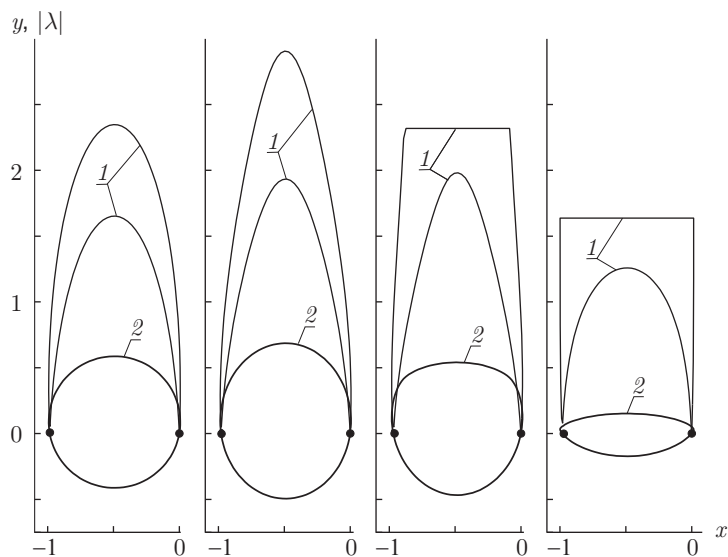


Рис. 5.13. Оптимальные контуры, соответствующие точному решению, при $\varepsilon = 1$, $\beta = 10^\circ$ и $M_\infty = 0,0001; 0,3; 0,4; 0,5761$

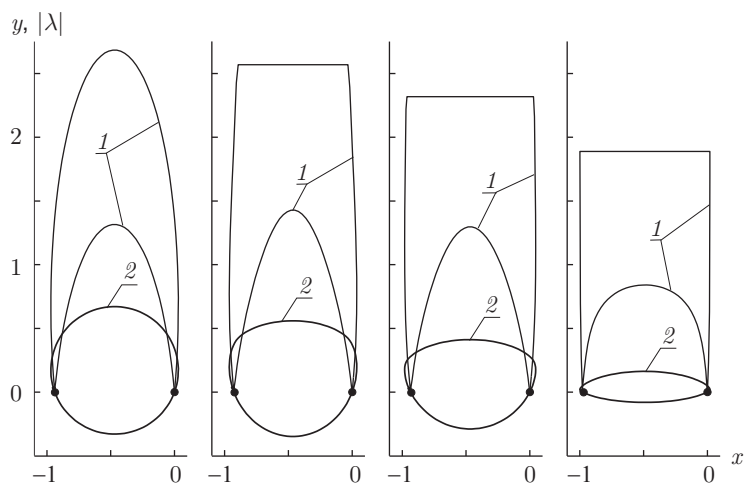


Рис. 5.14. Оптимальные контуры, соответствующие точному решению, при $\varepsilon = 1$, $\beta = 20^\circ$ и $M_\infty = 0,0001; 0,36; 0,4; 0,495$

области течения (таким парам (M_∞, β) соответствуют правые концы сплошных кривых на рис. 5.10 и рис. 5.11). Один из таких примеров изображен на рис. 5.16, ему соответствует последняя строка в табл. 5.5.

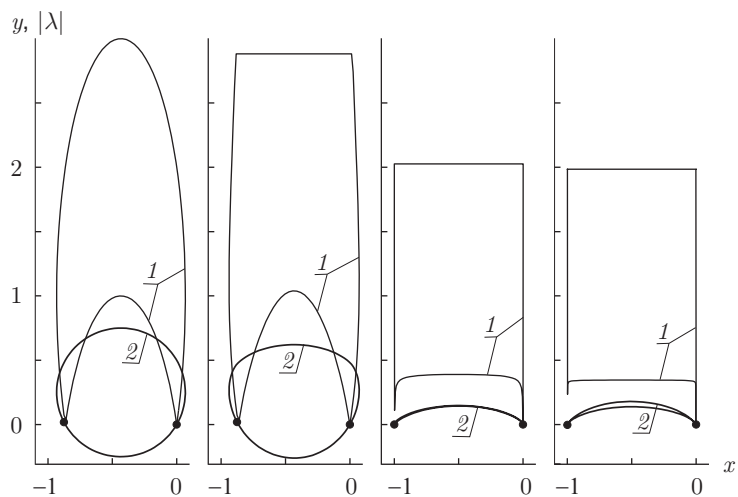


Рис. 5.15. Оптимальные контуры, соответствующие точному решению, при $\varepsilon = 1$, $\beta = 30^\circ$ и $M_\infty = 0,0001; 0,32; 0,46; 0,47$

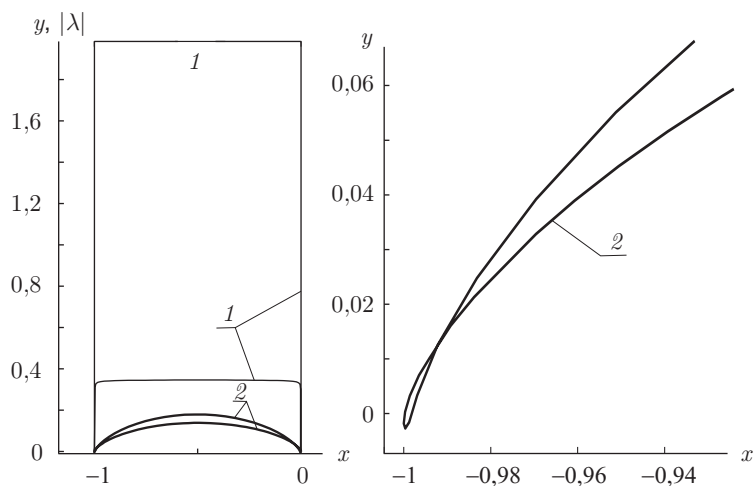


Рис. 5.16. Оптимальный самопересекающийся контур, соответствующий точному решению, при $\varepsilon = 1$, $\beta = 30^\circ$ и $M_\infty = 0,47$

На рис. 5.17 и в табл. 5.6 показано сравнение точного (сплошные линии) и численного (пунктирные линии) решений задачи, а также

Таблица 5.5

**Характеристики точных оптимальных решений для $\varepsilon = 1$ при
разных β и M_∞**

M_∞	t_{\max}	α°	C_y	Υ^*
$\beta = 5^\circ$				
0,0001	0,9997	5,0000	0,6972	0,1743
0,4	1,1443	15,2812	0,7372	0,1843
0,6	0,4309	2,9498	0,7108	0,1777
0,721	0,1684	0,3393	0,6401	0,1600
$\beta = 10^\circ$				
0,001	0,9999	10,0000	1,3892	0,3473
0,3	1,1804	16,6797	1,4392	0,3598
0,4	1,0084	17,1004	1,4679	0,3670
0,5761	0,3245	1,8868	1,3686	0,3422
$\beta = 20^\circ$				
0,001	0,9996	20,0000	2,7362	0,6840
0,36	0,9075	19,9129	2,8890	0,7223
0,4	0,7012	12,5407	2,8739	0,7185
0,495	0,2434	1,2771	2,6323	0,6581
$\beta = 30^\circ$				
0,001	0,9998	30,0010	4,0000	1,0000
0,32	0,8812	25,0331	4,2430	1,0608
0,46	0,0031	0,1937	3,3679	0,8420
0,47	решение с неоднолистной областью течения			

соответствующих хордовых диаграмм скорости. Численное решение построено методом, описанным в п. 4.2.2. Видно хорошее совпадение этих решений, что послужило основанием применения численного метода для оптимизации контуров с острой задней кромкой. Время расчета при этом значительно увеличилось.

На рис. 5.18 показаны оптимальные профили (контуры 2) и соответствующие хордовые диаграммы скорости (линии 1) для случая заостренной задней кромки ($\varepsilon = 2$) при $\beta = 10^\circ$ и разных λ_∞ . Соответствующие характеристики профилей представлены в нижней части табл. 5.6. Из рис. 5.18 видно, что большие градиенты скорости в окрестности задней кромки будут приводить к отрыву потока, поэто-

му в качестве дополнительного ограничения при оптимизации было применено условие безотрывности (1.3.8). Полученные оптимальные безотрывные крыловые профили при $\beta = 0,1$ показаны на рис. 5.19, а при разных числах Маха (штриховая линия — $M_\infty = 0,3$, пунктирная линия — $M_\infty = 0,5$, сплошная линия — $M_\infty = 0,6$). На рис. 5.19, б пред-

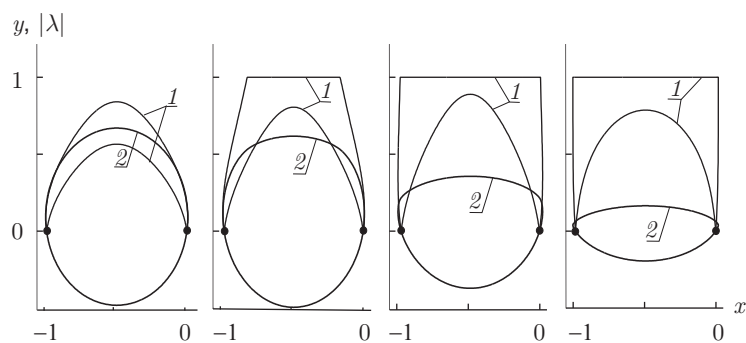


Рис. 5.17. Оптимальные профили (2) и хордовые диаграммы скорости (1) для $\varepsilon = 1$, $\beta = 10^\circ$ и $\lambda_\infty = 0,3; 0,4; 0,5; 0,6$

Таблица 5.6

Характеристики численных решений при $\beta = 10^\circ$ и разных λ_∞

λ_∞	M_∞	t_{\max}	α°	C_y	Υ^*
Точное решение для $\varepsilon = 1$					
0,3	0,2759	1,1507	16,4603	1,4314	0,3579
0,4	0,3701	1,1111	18,6000	1,4621	0,3655
0,5	0,4663	0,7277	9,5704	1,4614	0,3654
0,6	0,5649	0,3584	2,1642	1,3829	0,3457
Численный метод для $\varepsilon = 1$					
0,3	0,2759	1,1486	16,0001	1,4314	0,3570
0,4	0,3701	1,1097	18,5177	1,4620	0,3650
0,5	0,4663	0,7252	8,7196	1,4610	0,3650
0,6	0,5649	0,3582	2,0189	1,3828	0,3450
Численный метод для $\varepsilon = 2$					
0,3	0,2759	1,0477	2,8241	1,4102	0,3525
0,4	0,3701	1,0246	5,6698	1,4420	0,3605
0,5	0,4663	0,6907	-1,0274	1,4397	0,3592
0,6	0,5649	0,3472	-7,5700	1,3533	0,3383

ставлены соответствующие распределения скорости, а в табл. 5.7 — аэродинамические характеристики.

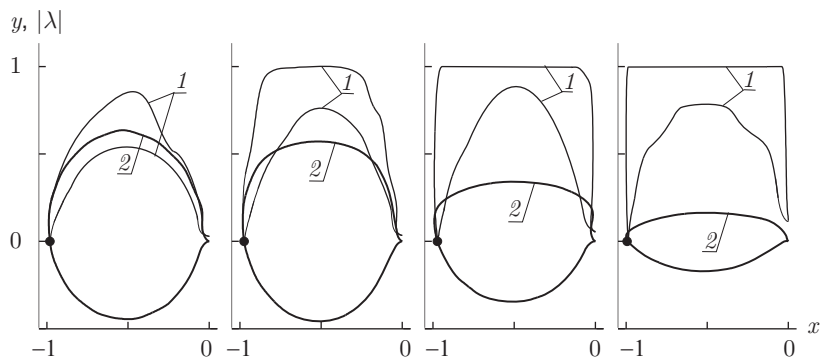


Рис. 5.18. Оптимальные профили (контуры 2) и хордовые диаграммы скорости (линии 1) для $\varepsilon = 2$, $\beta = 10^\circ$ и $\lambda_\infty = 0,3; 0,4; 0,5; 0,6$

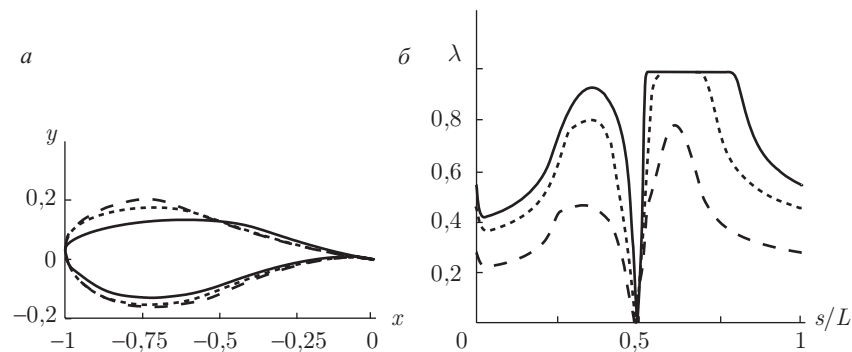


Рис. 5.19. Оптимальные безотрывные крыловые профили (a) и распределения скорости (b) при $\beta = 10^\circ$ и разных числах M_∞

Таблица 5.7

Характеристики оптимальных безотрывных профилей, построенных численно, при $\beta = 0,1$ и разных числах M_∞

M_∞	t_{\max}	α°	C_y	Υ^*
0,3	0,3683	0,0000	0,7793	0,1950
0,5	0,3278	-1,400	0,7784	0,1940
0,6	0,2512	-2,6254	0,7643	0,1912

В заключение настоящего раздела сделаем одно замечание.

Как отмечено в замечании 5.1, заменой переменных $R(\gamma) = P(\gamma) + \ln T(P, \beta; \gamma)$ функционалы $I_c(P)$ и $E_c(P, \beta)$ сводятся к функцио-

налам $I_0(R)$ и $E_0(P, \beta)$. В этом случае непосредственными вычислениями нетрудно получить следующее явное выражение управляющей функции $P(\gamma)$ через новую управляющую функцию $R(\gamma)$:

$$P(\gamma) = R(\gamma) + \ln \frac{2}{\sqrt{1 + 4c^2 M^2(\gamma, \beta) \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|^{2-2\varepsilon} \exp[2R(\gamma)] + 1}}. \quad (5.2.3)$$

Из последнего равенства с учетом малости величины c^2 после разложения выражения под логарифмом в степенной ряд в окрестности $c^2 = 0$ получим

$$P(\gamma) = R(\gamma) + 2c^4 M^2(\gamma, \beta) \left| 2 \sin \frac{\gamma + \beta}{2} \right|^{2-2\varepsilon} \exp[2R(\gamma)] + o(c^4).$$

Следовательно, отбросив члены порядка малости c^4 и выше, с достаточной степенью точности можно считать, что функция $R(\gamma)$ удовлетворяет тем же ограничениям при оптимизации, что и управляющая функция $P(\gamma)$. В результате процедура оптимизации коэффициента подъемной силы и аэродинамического качества в рамках модели газа Чаплыгина сводится к минимизации функционала $I_0(R)$ при ограничениях (5.1.5), (5.1.6), где $P(\gamma)$ заменена на $R(\gamma)$, т.е. к уже решенной оптимизационной задаче для модели ИНЖ. После нахождения экстремальной функции $R_*(\gamma)$ соответствующую ей функцию $P_*(\gamma)$ найдем из (5.2.3), а по последней, используя интегральное представление решения основной ОКЗА для модели газа Чаплыгина, построим контур искомого профиля оптимальной формы.

Вычислительные эксперименты, проведенные в случае модели газа Чаплыгина по описанной выше процедуре, подтвердили тенденции изменения формы оптимальных профилей при изменении β (напомним, что в данном случае величина $\lambda_{\max} = 1$ и варьироваться не может).

5.3. Оптимизированные профили в вязком потоке

5.3.1. Безотрывные профили максимальной подъемной силы.

С целью изучения влияния различных критериев безотрывности, а также величины угла β на форму оптимизированных профилей была проведена серия вычислительных экспериментов. Первая серия расчетов выявила зависимость результатов оптимизации от теоретического угла атаки β .

На рис. 5.20–рис. 5.22 представлены профили максимальной подъемной силы (и распределения $v(s)$ для них), безотрывные по разным критериям и полученные при различных β ($\beta = 0,1$ — линии 1, $\beta = 0,15$ — линии 2 и $\beta = 0,2$ — линии 3). В табл. 5.8 приведены характеристики этих профилей, вычисленные при $Re_\infty = 10^7$; I_0^* обозначает экстремальное значение функционала I_0 .

Установлено, что с возрастанием β увеличивается расчетный угол атаки α и независимо от критерия безотрывности оптимальные профили становятся тоньше, а величины C_y , C_x и K повышаются. Увеличивается градиент скорости в окрестности точки разветвления потока. При ослаблении критерия безотрывности (например при переходе от условия Лойцянского к условию Кочина–Лойцянского для неизменного значения $m = 6$) подъемная сила и коэффициент C_y , естественно, уве-

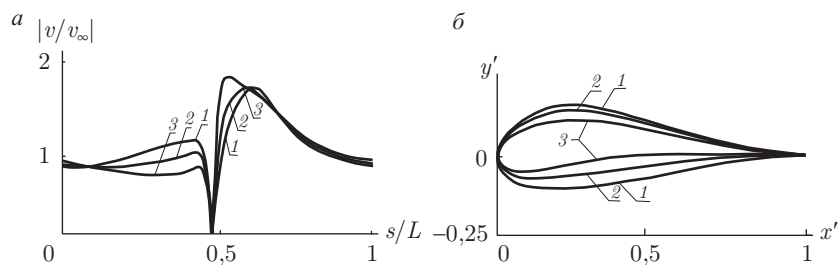


Рис. 5.20. Профили максимальной подъемной силы, безотрывные по Лойцянскому при фиксированном β : а — оптимизированные распределения скорости; б — формы оптимизированных профилей

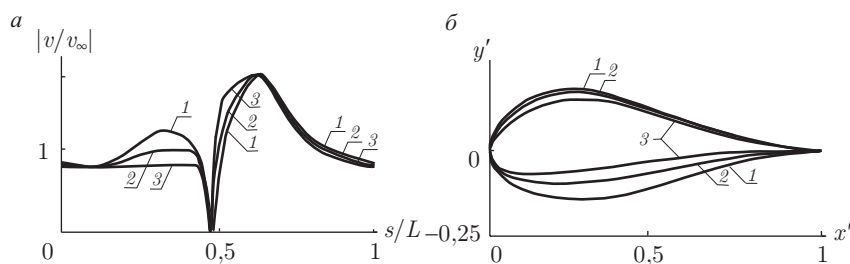


Рис. 5.21. Профили максимальной подъемной силы, безотрывные по Прандтлю–Бури при фиксированном β : а — оптимизированные распределения скорости; б — формы оптимизированных профилей

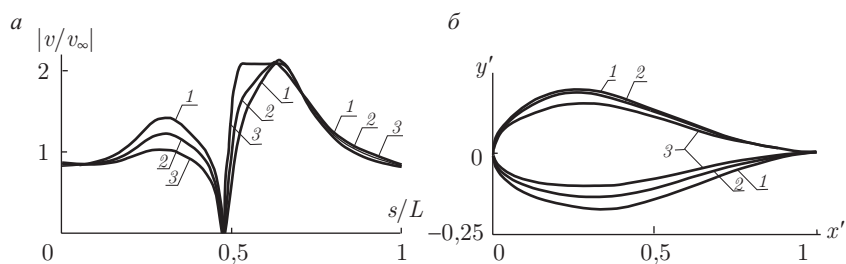


Рис. 5.22. Профили максимальной подъемной силы, безотрывные по Кочину–Лойцянскому при фиксированном β : а — оптимизированные распределения скорости; б — формы оптимизированных профилей

Таблица 5.8

Характеристики оптимизированных профилей

Рисунок	Поз.	β	α°	b/L	$t_{\max} \%$	C_y	C_x	K	I_0^*
5.20	1	0,10	4,0	0,46	26,2	0,75	0,013	55,7	3,61
	2	0,15	5,8	0,47	20,8	1,08	0,013	81,2	3,67
	3	0,20	8,6	0,48	14,8	1,39	0,014	99,5	3,75
5.21	1	0,10	4,7	0,46	31,5	0,78	0,016	49,2	3,55
	2	0,15	6,1	0,46	27,3	1,13	0,016	72,4	3,60
	3	0,20	8,4	0,47	21,5	1,45	0,016	91,8	3,66
5.22	1	0,10	6,1	0,45	34,4	0,79	0,018	43,2	3,52
	2	0,15	7,7	0,46	29,8	1,15	0,018	62,5	3,55
	3	0,20	10,5	0,47	22,9	1,48	0,019	78,2	3,60

личиваются, однако при этом одновременно растут углы атаки и коэффициенты профильного сопротивления, а аэродинамическое качество падает. Относительная толщина профилей при расширении множества управляющих функций растет, отношение хорды профиля к периметру его контура при увеличении β также возрастает.

Как показано в п. 1.3.1 (см. табл. 1.1), значения эмпирических констант a и b в критериях безотрывности имеют незначительный разброс, в то время как предельные значения формпараметра f_0 существенно различаются. Учитывая, что постоянные $a = 1,17$, $b = 4,75$, выбранные по методу Кочина–Лойцянского, наиболее близки к средним значениям для a и b , можно приближенно рассматривать методы Прандтля–Бури и Лойцянского как более жесткие варианты реализации условия Кочина–Лойцянского при запасе безотрывности $k \in [0,8; 0,9]$ и $k \in [0,3; 0,5]$ соответственно. Будучи наиболее ограничительным, критерий Лойцянского, естественно, не способствует получению самых высоких значений оптимизируемых аэродинамических характеристик. В то же время он дает результаты наиболее близкие к критериям безотрывности, построенным по уточненным моделям. Кроме того, сравнение различных критериев безотрывности показало, что чем жестче условие безотрывности, тем тоньше оптимальный профиль и меньше его подъемная сила.

В серии вычислительных экспериментов, когда β является параметром оптимизации, установлено, что минимальные значения функционала J с ростом β тоже увеличиваются, но значительно медленнее, чем $\sin \beta$. Поэтому минимумы функционала I_0 с возрастанием β убывают, и задача определения его экстремума эквивалентна задаче отыскания максимальной величины $\beta = \beta^*$, при которой множество U допустимых решений не пусто. Кроме того, при росте β оптимальные безотрывные

профили становятся неоднолиственными, поэтому на множество допустимых решений необходимо наложить одно из ограничений, описанных в п. 1.4.2.

На рис. 5.23 представлены профили 1–3, безотрывные соответственно по Лойцянскому, Прандтлю–Бурри и Кочину–Лойцянскому и полученные в результате минимизации функционала $I_0 \operatorname{cosec} \beta$ при $P(\gamma) \in U$ с учетом условия однолиственности области течения. При использовании менее жесткого условия безотрывности коэффициенты C_y , C_x , угол атаки α , v_{\max} и максимальное значение угла β возрастают, профили утолщаются, а аэродинамическое качество падает (см. табл. 5.9).

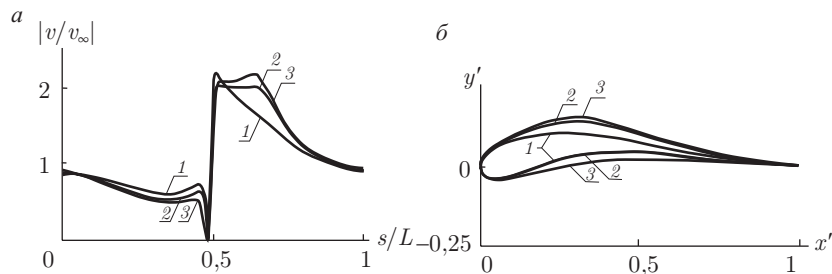


Рис. 5.23. Профили максимальной подъемной силы, когда β — параметр оптимизации: а — оптимизированные распределения скорости; б — безотрывные оптимизированные профили

Таблица 5.9

Характеристики профилей максимальной подъемной силы, когда β — параметр оптимизации

Профиль	β	α°	b/L	$t_{\max} \%$	C_y	C_x	K
1	0,22	9,6	0,48	11,5	1,50	0,014	104,7
2	0,27	10,7	0,48	14,4	1,85	0,017	108,5
3	0,31	13,1	0,47	15,0	2,13	0,023	94,5

На рис. 5.24, б представлены результаты численного решения задачи максимизации подъемной силы для профилей с бесконечно тонкой задней кромкой ($\varepsilon = 2$) при фиксированной величине $\beta = 0,1$ и значении $f_0/a = -5,13$ в условии безотрывности по Кочину–Лойцянскому (см. табл. 1.1) с учетом сжимаемости потока в рамках модели газа Чаплыгина. Контур 3 соответствует значению $M_\infty = 0,3$ ($\lambda_\infty = 0,326$), а контуры 2 и 1 — $M_\infty = 0,5$ ($\lambda_\infty = 0,535$) и $M_\infty = 0,6$ ($\lambda_\infty = 0,635$). Вычисленные углы атаки α равны соответственно $4,96^\circ$, $4,35^\circ$ и $0,89^\circ$. На рис. 5.24, а представлены соответствующие распределения скорости.

Вычислительные эксперименты показали, что, как и в случае несжимаемой жидкости для оптимизированных профилей, обтекаемых потоком газа, все отмеченные выше тенденции изменения параметров

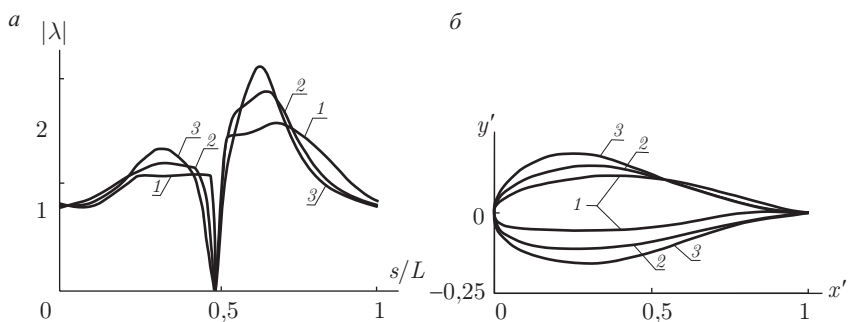


Рис. 5.24. Профили максимальной подъемной силы в газе Чаплыгина: *a* — оптимизированные распределения скорости; *б* — формы оптимизированных профилей

α , Γ , t_{\max} , C_y , C_x , K и b/L сохранились. Далее, профили минимального сопротивления и максимального аэродинамического качества, оптимизированные для одного и того же значения β , опять практически совпали. Сравнение построенных в газе профилей и их характеристик при $M_\infty = 0,3$ с аналогичными результатами для несжимаемой жидкости ($M_\infty = 0$) показало, что при незначительной разнице в толщине (например, профили максимальной подъемной силы стали тоньше в среднем на 2%) оптимальные очертания контуров в обоих случаях практически совпали. При этом расхождение в значениях аэродинамических характеристик не превысило 0,2% для значений C_y и 2,3% — для C_x . Полученные результаты хорошо согласуются с известными данными, в соответствии с которыми при малых скоростях ($M_\infty < 0,3$) сжимаемостью потока можно пренебречь.

Дальнейшее увеличение числа M_∞ привело к более существенным различиям. В частности, в задаче максимизации подъемной силы при $\beta = 0,10$ и разных значениях M_∞ расхождение между оптимизированными при $M_\infty = 0$ и $M_\infty = 0,4$ профилями составило уже 17,7% в толщине и 7% — в значении C_y . Такая разница в значительной степени обусловлена выполнением требования ограниченности величины скорости, влияние которого с ростом числа M_∞ становится все сильнее. Отметим также, что учет сжимаемости заметно сказался на времени расчетов. В частности, одна итерация в задачах максимизации подъемной силы и минимизации сопротивления потребовала соответственно на 17% и 41% больше времени, чем для несжимаемой жидкости.

5.3.2. Безотрывные профили минимального сопротивления.

В задаче минимизации профильного сопротивления при фиксированном значении β (примеры оптимизированных контуров см. в [35])

установлено, что с увеличением β (и, следовательно, α) независимо от критерия безотрывности оптимальные профили становятся тоньше, а C_y , C_x , K и максимальное значение скорости v_{\max} возрастают (что полностью идентично свойствам профилей максимальной подъемной силы). Вместе с тем при ослаблении условия безотрывности величина C_x незначительно увеличивается и одновременно уменьшается угол атаки и возрастает аэродинамическое качество. Относительная толщина профилей при расширении множества управляющих функций убывает. Отношение b/L у оптимизированных профилей для всех критериев безотрывности остается практически неизменным. Кроме того, в результате расчетов выяснилось, что функционалы E_0 и E_0/I_0 незначительно отличаются по своему поведению в окрестности экстремальных точек, поэтому профили минимального сопротивления и максимального качества, полученные их минимизацией при одних и тех же значениях β , практически совпали.

5.3.3. Задачи с ограничениями на аэродинамические параметры. Наряду с вариационными задачами, описанными выше, интерес представляет случай, когда оптимизируется одна из аэродинамических характеристик при ограничениях на другие, что подтверждается следующим соображением.

Очевидно, что нельзя построить профиль, у которого сразу все аэродинамические параметры были бы оптимальными. Более того, оптимизация одного из параметров часто приводит к ухудшению других. Например, максимизация подъемной силы, как правило, сопровождается ростом профильного сопротивления. Поэтому в задачах профилирования при оптимизации одной из аэродинамических характеристик естественно использовать сдерживающие ограничения на другие, обеспечив их приемлемость.

Дополнительные ограничения вида $C_y \geq C_{y*}$, $C_x \leq C_{x*}$, $K \geq K_*$ (C_{y*} , C_{x*} , K_* — заданные величины) на множество U в силу соотношений (5.1.10), (5.1.35) и (5.1.34) могут быть записаны в виде следующих ограничений на соответствующие функционалы:

$$I_c(P) \leq \frac{16\pi \sin \beta}{C_{y*}}, \quad (5.3.1)$$

$$\frac{E_c(P; \beta)}{I_c(P)} \leq \frac{\lambda_{\infty}^{4,2-b} C_{x*} (2 \operatorname{Re})^{1/(m+1)}}{4A},$$

$$E_c(P; \beta) \leq \frac{4\pi \lambda_{\infty}^{4,2-b} \sin \beta (2 \operatorname{Re})^{1/(m+1)}}{AK_*}. \quad (5.3.2)$$

Наличие явной зависимости $v = v(P, \beta; \gamma)$ в виде (5.1.20) позволяет также включить в множество U ограничения и на распределение скорости, например ограничить максимальную величину скорости.

На рис. 5.25 представлены безотрывные по Лойцянскому при фиксированном значении $\beta = 0,1$ и числе $\operatorname{Re}_{\infty} = 10^7$ профили максимальной подъемной силы (линия 1) и минимального сопротивления

(линия 2). Первый из них получен при дополнительном ограничении $C_x \leq 0,011$ и имеет $C_y = 0,701$; второй построен с учетом условия $C_y \geq 0,72$ и имеет $C_x = 0,0122$.

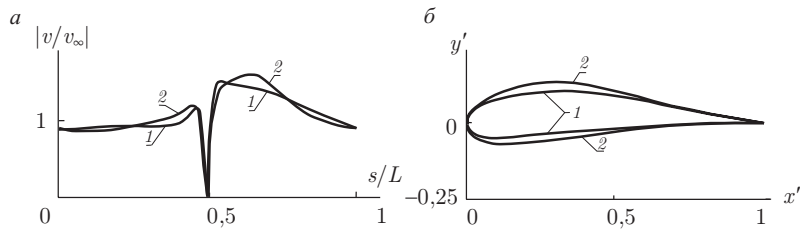


Рис. 5.25. Оптимизированные профили, безотрывные по Лойцянскому и построенные при дополнительных ограничениях на аэродинамические коэффициенты: а — оптимизированные распределения скорости; б — формы оптимизированных профилей

5.3.4. Оптимизация для диапазона углов атаки. Границы диапазона безотрывности — углы β_2 и β_1 можно задать заранее или считать их параметрами оптимизации, определяемыми в ходе решения вместе с функцией $P(\gamma)$.

На рис. 5.26, б линией 1 показан безотрывный по Кочину–Лойцянскому в заданном диапазоне углов $\beta_2 = 0,05$, $\beta_1 = 0,2$ профиль

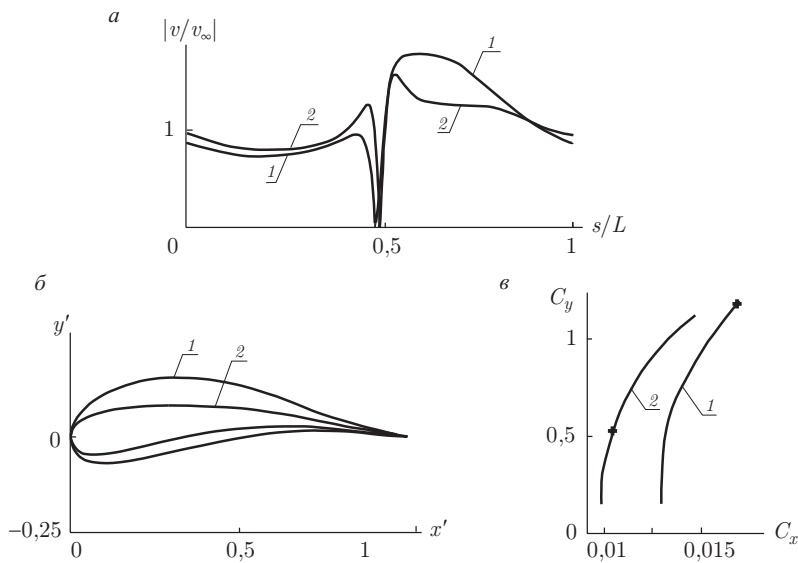


Рис. 5.26. Пример оптимизации формы профиля для диапазона углов атаки при фиксированных границах этого диапазона: а — оптимизированные распределения скорости; б — профили максимальной подъемной силы, безотрывные по Кочину–Лойцянскому; в — полярная диаграмма $C_y = C_y(C_x)$

максимальной подъемной силы, оптимизированный при $\beta = \beta_1 = 0,2$, $Re_\infty = 6 \cdot 10^6$ с ограничением $C_x \leq 0,017$ при $\beta = \beta_1$. Полярная диаграмма $C_y = C_y(C_x)$ этого профиля, соответствующая участку безотрывного обтекания, приведена на рис. 5.26, *в* (линия 1). Крестиком на диаграмме отмечена точка, соответствующая проектным условиям ($\beta = 0,2$, $C_x = 0,017$, $C_y = 1,35$).

Для получения профиля, имеющего меньшее сопротивление во всей области безотрывного обтекания, была решена следующая задача. В том же диапазоне $\beta \in [0,05; 0,2]$ при ограничениях $C_y \geq 1,15$, $C_x \leq 0,017$ на его верхней границе минимизировалось профильное сопротивление при $\beta = 0,1$. Соответствующие ее решению профиль и полярны представлены линиями 2 на рис. 5.26. Как видим, полярны профиля 2 лежит левее полярны профиля 1 и имеет близкую область значений C_y , соответствующих безотрывному обтеканию этого профиля. Как и в первом случае, точка, соответствующая характеристикам оптимизированного профиля при $\beta = 0,1$, отмечена на полярне 2 крестиком.

Распределения скоростей для профилей 1, 2 при проектных углах $\beta = 0,2$ и $\beta = 0,1$ соответственно приведены на рис. 5.26, *а*.

5.4. Максимизация критического числа Маха для несущих крыловых профилей

Как известно, одной из важных задач теории движения газа около тел заданной формы является определение диапазона изменения числа Маха M_∞ набегающего потока, при котором течение остается всюду дозвуковым. Верхняя граница M^* этого диапазона называется критическим числом Маха и служит параметром, по которому оценивают аэродинамические характеристики околозвуковых крыловых профилей. При $M_\infty \leq M^*$ для них по определению числа M^* коэффициент волнового сопротивления $C_x = 0$. Критическое число Маха определяется формой обтекаемого профиля. Поэтому представляет интерес оценка M^* для различных профилей и нахождение конфигураций, которые обтекаются дозвуковым потоком с максимально возможным M_∞ .

В настоящем разделе в рамках модели газа Чаплыгина задача максимизации M_∞ для выбранного класса несущих крыловых профилей сведена к минимаксной задаче специального вида. Построено точное решение последней задачи для расширенного класса течений, включающего неоднородные, и, следовательно, найдена оценка M^* сверху. Указаны профили, имеющие повышенное в сравнении с известными критическое число Маха.

5.4.1. Постановка задачи. Сведение к вариационной задаче.

Рассмотрим установившееся плавное дозвуковое адиабатическое обтекание идеальным газом со скоростью λ_∞ на бесконечности непроницаемого крылового профиля из заданного класса (рис. 5.27). Будем

считать, что профили этого класса ограничены замкнутыми кусочно-гладкими контурами L_z , имеющими периметр $L = 2$ и острые кромки A и B с внешними углами $\pi\varepsilon_1$ и $\pi\varepsilon$ соответственно, $\varepsilon_1, \varepsilon \in [1, 2]$ (при $\varepsilon_1 = 1$ или $\varepsilon = 1$ на L_z отмечены точки A или B , не являющиеся угловыми). В этих кромках расположены передняя и задняя критические точки потока. Система координат выбрана так, что ее начало совпадает с точкой B , а ось абсцисс направлена параллельно вектору скорости набегающего потока. Фиксировано также значение $\beta \in [0, \pi/2]$ теоретического угла атаки. В дальнейшем все скорости будем относить к критической скорости a_* .

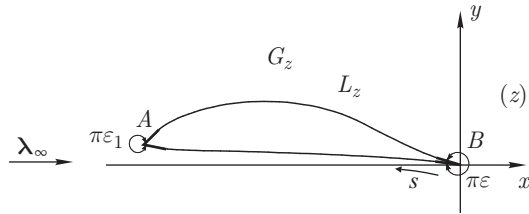


Рис. 5.27. К постановке задачи

Для указанного класса профилей требуется найти такое значение $\lambda^* = \lambda^*(\beta)$, чтобы при всех $\lambda_\infty > \lambda^*$ было невозможно полностью дозвуковое обтекание, т.е. для всех профилей было нарушено условие $\lambda_{\max} \leq 1$, где λ_{\max} — максимальное значение скорости на профиле.

Решение поставленной задачи в рамках точных уравнений установившегося дозвукового адиабатического движения идеального газа весьма сложно. В целях упрощения используем приближенную модель дозвукового течения газа, описанную в разд. 1.2. В этом случае функция Жуковского $\chi_0 = S - i\vartheta$ является аналитической функцией комплексного переменного $w = \varphi + i\psi$, причем функция S связана с величиной λ скорости потока формулой (5.1.3). Названная модель (модель газа Чаплыгина) обеспечивает удовлетворительную точность при расчете поля скоростей λ в дозвуковой области. Однако переход к газу Чаплыгина, согласно [81], дает погрешность при вычислении по λ чисел Маха M , поскольку формально для газа Чаплыгина число Маха не достигает единицы. Поэтому в приближении Чаплыгина обычно определяют только скорость λ , а затем M вычисляют по точной формуле (1.2.7). В этом случае максимизация M_∞ для выбранного класса профилей эквивалентна максимизации величины λ_∞ скорости набегающего потока при условии, что скорость на профиле не превосходит единицы.

Сведем рассматриваемую задачу к вариационной. В силу наложенных ограничений каждому профилю рассматриваемого класса при обтекании газом Чаплыгина однозначно соответствует распределение $\lambda(s)$ величины скорости на контуре, имеющее вид (5.1.1). Как и выше, это соответствие можно описать, воспользовавшись интегральным

представлением (5.1.2). Контур профиля будет замкнутым, а найденная величина скорости набегающего потока совпадет с заданным значением тогда и только тогда, когда выполняются условия (4.1.3). Далее, течение вокруг профиля будет всюду дозвуковым, если выполнится неравенство (5.1.4).

Итак, если взять множество управляющих функций

$$S(\gamma) = P(\gamma) + S_0(\gamma)$$

(см. п. 5.1.2), удовлетворяющих условиям (5.1.13)–(5.1.15), то каждой из них однозначно соответствует профиль, ограниченный контуром L_z и восстанавливаемый по формуле (5.1.2). Указанные ограничения на множество управляющих функций не гарантируют простоту контуров L_z , поэтому формула (5.1.2) описывает более широкое, чем исходное, множество течений, включающее и неоднолистные. При соответствующем значении T каждый построенный профиль будет обтекаться дозвуковым потоком газа со скоростью λ_∞ на бесконечности, определяемой из уравнения (5.1.13).

Пусть $c^2 = 0,296$. В силу (5.1.12) задача максимизации λ_∞ эквивалентна максимизации функционала T на выбранном множестве функций $S(\gamma)$. Отметим, что функционал T и ограничения (5.1.14), (5.1.15) линейны, однако сформулированная экстремальная задача является нестандартной, так как правая часть (5.1.14) нелинейно зависит от максимизируемой величины T .

5.4.2. Решение вариационной задачи. Точную верхнюю оценку искомой величины λ_∞^* дает теорема 5.1. При фиксированном β максимальное значение λ_∞^* скорости набегающего потока, для которого существуют профили с дозвуковым обтеканием, оценивается так: $\lambda_\infty^* \leq \lambda_\infty^{(1)}(\beta)$, причем

$$\lambda_\infty^{(1)}(\beta) = \frac{\exp(T_*)}{1 - c^2 \exp(2T_*)},$$

где T_* — корень уравнения (5.1.11). Соответственно, мажоранта $M^{(1)}(\beta)$ критического числа Маха M^* определится формулой (1.2.7). В предельном случае $\beta = 0$ имеем $T_* = c_0$ и $M^{(1)}(0) = 1$. Этому соответствует симметричное обтекание отрезка со звуковой скоростью. В общем случае график зависимости $M^{(1)} = M^{(1)}(\beta)$, определяемой по формуле (1.2.7) для $\kappa = 7/5$, изображен линией I на рис. 5.28 ($M^{(1)}(\pi/2) = 0,298$). Эта линия позволяет разделить область изменения параметров M_∞, β на две

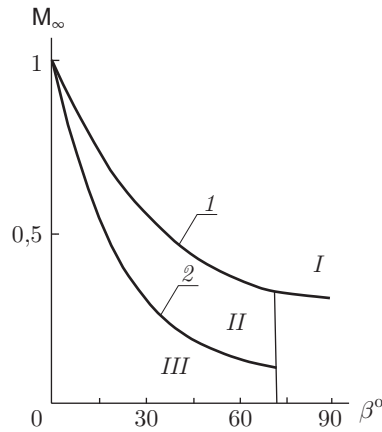


Рис. 5.28. Область допустимых значений параметров оптимизации

зоны. Если о проектируемом профиле известно, что он должен обтекаться потоком под таким углом β и с таким числом Маха M_∞ , что точка (M_∞, β) лежит выше линии I , то в рамках принятой модели профиль обязательно будет иметь сверхзвуковую зону. Если точка (M_∞, β) лежит ниже линии I , то построение докритического профиля с указанными характеристиками возможно.

Для оценок λ_∞^* и M^* снизу достаточно взять величины λ_∞ и M_∞ для некоторого течения, удовлетворяющего условию $\lambda(s) \leq 1$. Пример такого течения подберем как решение некоторой новой вариационной задачи.

Введем величину, характеризующую отклонение потока от невозмущенного:

$$B[\lambda_\infty, \beta, \lambda(s), \vartheta(s)] = \sup_{s \in [0, 1]} \left\{ \left[\ln \frac{\Lambda(s)}{\Lambda_\infty} \right]^2 + [\vartheta(s) - \vartheta_\infty]^2 \right\}^{1/2}, \quad (5.4.1)$$

где $\lambda(s) \exp[i\vartheta(s)]$ — вектор приведенной скорости на профиле,

$$\Lambda = \frac{(1 + 4c^2 \lambda^2)^{1/2} - 1}{2c^2 \lambda}. \quad (5.4.2)$$

Поставим следующую вариационную задачу. При заданных λ_∞ и β найти такой профиль из рассматриваемого класса, для которого функционал $B[\lambda_\infty, \beta, \lambda(s), \vartheta(s)]$ принимает наименьшее значение, и определить величину

$$B(\lambda_\infty, \beta) = \min B[\lambda_\infty, \beta, \lambda(s), \vartheta(s)], \quad (5.4.3)$$

где минимум берется по всевозможным профилям.

Решение этой задачи также можно получить на основании принципа Линделёфа (см. [23]). Действительно, аналитическая функция $\chi_0(\zeta)$, $\zeta \in E^-$, из формулы (5.1.2) равна $\ln(\Lambda e^{-i\vartheta})$ при $z = z_P(\zeta)$. В силу соотношений (5.4.1)–(5.4.3) имеем

$$B(\lambda_\infty, \beta) = \min_{|\zeta| > 1} \sup |\chi_0(\zeta) - \chi_0(\infty)|, \quad (5.4.4)$$

где минимум берется по всем аналитическим функциям $\chi_0(\zeta)$, представимым в области G_ζ интегралом Шварца с плотностью $S(\gamma)$ при условии (5.1.14). По принципу Линделёфа этот минимум достигается на функции

$$\chi_0(\zeta) = \frac{D(T, \beta)}{\zeta} + \chi_0(\infty),$$

где значение $D(T, \beta)$ определено в (5.1.14). Положив $\vartheta_\infty = 0$, т.е. $\chi_0(\infty) = T$, по формуле (5.1.2) можно восстановить профиль, являющийся решением задачи (5.4.4). Для него условие $\max_s \lambda(s) = 1$, т.е. условие

$$\max_{\gamma \in [0, 2\pi]} S(\gamma) = c_0$$

приводит к уравнению

$$T - c_0 + 2D(T, \beta) = 0,$$

решение которого $T_{**} < T_*$. Поэтому

$$\lambda_{\infty}^* \geq \lambda_{\infty}^{(2)}(\beta) = \frac{\exp(T_{**})}{1 - c^2 \exp(2T_{**})}.$$

Заменив λ_{∞} на $\lambda_{\infty}^{(2)}(\beta)$ в формуле (1.2.7), определим величину $M^{(2)}(\beta)$, дающую оценку снизу для M_{∞} . График зависимости $M^{(2)}(\beta)$ при $\varkappa = 7/5$ изображен штриховой линией 2 на рис. 5.28.

Расчеты показали, что экстремальным функциям

$$\chi_0(\zeta) = \frac{D(T, \beta)}{\zeta} + T$$

при $T \in (0, T_{**})$ соответствуют однолистные течения лишь при $\beta \in [0, \beta_0]$, $\beta_0 \approx 68,25^\circ$, $M^{(2)}(\beta_0) = 0,11$. Соответствующие контуры L_z при $T = T_{**}$ и различных β представлены на рис. 5.29 и рис. 5.30. Контурсы профилей на рис. 5.29, б соответствуют выбору $\beta = 10^\circ$ (сплошная кривая 1), 20° (штриховая кривая 2) и 30° (штрих-пунктир-

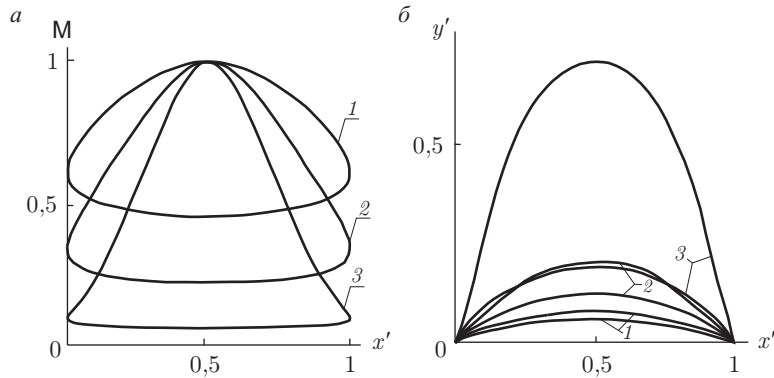


Рис. 5.29. Профили, максимизирующие критическое число Маха при разных значениях β : а — распределения $M = M(x)$ чисел Маха по хорде профилей при $\beta = 10^\circ, 20^\circ$ и 30° (1–3); б — соответствующие формы контуров

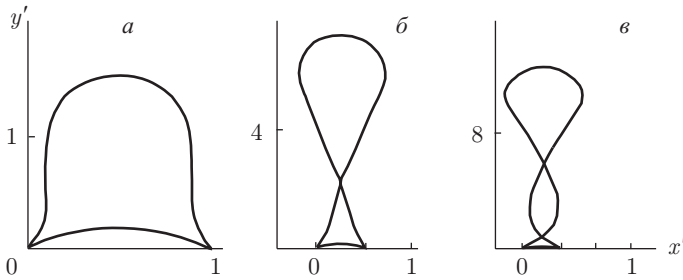


Рис. 5.30. Переход от однолистного течения к неоднolistному: а — однолистное течение при $\beta = 50^\circ$; б — предельный случай однолистного течения при $\beta = 68,25^\circ$; в — неоднolistное течение при $\beta = 72^\circ$

ная кривая β). Соответствующие распределения чисел Маха по хорде профилей изображены на рис. 5.29, а. При уменьшении β контуры приближаются к отрезку. При увеличении β на верхней поверхности L_z сначала появляются две точки перегиба (для $\beta = 50^\circ$ форма контура изображена на рис. 5.30, а), затем появляется точка самопересечения верхней поверхности (рис. 5.30, б, $\beta = 68,25^\circ$) и, далее, течение становится неодноточным (контур на рис. 5.30, в соответствует выбору $\beta = 72^\circ$).

Сформулируем полученный результат.

Теорема 5.3. Если $\lambda_\infty < \lambda_\infty^{(2)}(\beta)$ и $\beta \in [0, \beta_0]$, то в рассматриваемом классе существуют такие профили, имеющие теоретический угол атаки β , что $\lambda(s) \leq 1$ всюду на L_z .

Таким образом, следствием теорем 5.1 и 5.3 являются неравенства

$$\lambda_\infty^{(2)}(\beta) \leq \lambda_\infty^*(\beta) \leq \lambda_\infty^{(1)}(\beta). \quad (5.4.5)$$

Эти оценки позволили выделить следующие три зоны распределения параметров M_∞ и β (см. рис. 5.28). Выбор точки из зоны I гарантирует получение отрицательного результата при конструировании докритических профилей с соответствующими параметрами M_∞ и β . Если точка (M_∞, β) лежит в зоне III, то докритический профиль с нужными характеристиками может быть построен. Зона II является пограничной, попадание (M_∞, β) в нее не гарантирует разрешимость задачи конструирования соответствующего профиля, хотя для некоторых точек (M_∞, β) решение может существовать.

5.4.3. Учет ограничения на аргумент вектора скорости. Рассмотрим теперь исходную задачу при следующем дополнительном ограничении на множество профилей. При их обтекании угол ϑ наклона вектора скорости потока изменяется в фиксированных пределах $\vartheta \in [-\vartheta_*, \vartheta^*]$, где $-\vartheta_*$ и ϑ^* , $-\infty \leq -\vartheta_* < \vartheta^* \leq \infty$, — заданные постоянные. Постановка задачи из п. 5.4.1 соответствует случаю $\vartheta_* = \vartheta^* = \infty$.

Доказательство теоремы 5.1, приведенное выше, существенно не изменится, если $0 < \vartheta_*, \vartheta^* < \infty$. Здесь функция $F_T(\zeta)$ из (5.1.16) удовлетворяет дополнительному ограничению $-\vartheta_* \leq \operatorname{Im} F_T(\zeta) \leq \vartheta^*$. Величина $\inf_{F_T \in \mathbf{F}(\mathbf{a})} \sup_{\gamma} \operatorname{Re} F_T(e^{i\gamma})$ достигается на функции $G(\zeta)$, которая конформно отображает единичный круг $|\zeta| < 1$ на полуполосу $-\vartheta_* \leq \operatorname{Im} G(\zeta) \leq \vartheta^*$, $\operatorname{Re} G \leq M$, где

$$M = M(T, \beta, \vartheta_*, \vartheta^*) = \frac{m}{2} \ln \frac{B+1}{B-1}, \quad m = \frac{\vartheta_* + \vartheta^*}{2},$$

$$B = \left[\frac{m^2}{A(T, \beta)^2} - \frac{m^2}{k^2} + 1 \right]^{1/2}, \quad k = m \cos \frac{n}{m} \geq \sin \beta, \quad n = \frac{\vartheta^* - \vartheta_*}{2}.$$

В данном случае уравнение (5.1.11) примет вид

$$T - c_0 + M(T, \beta, \vartheta_*, \vartheta^*) = 0.$$

Это уравнение также имеет единственный корень T^* , потому что функция в его левой части монотонна по T . Для некоторых значений ϑ^* и ϑ_* зависимости $M^* = M^*(\beta)$ представлены на рис. 5.31.

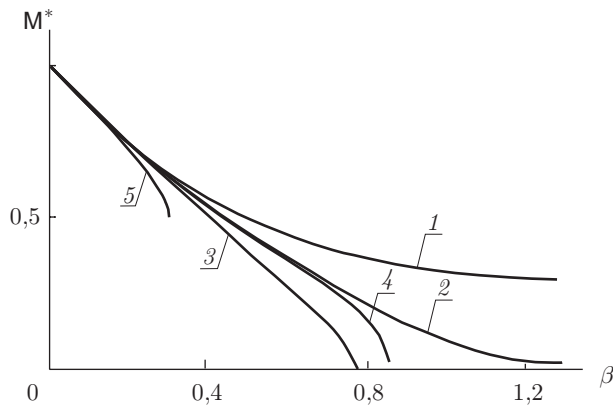


Рис. 5.31. Зависимости $M^* = M^*(\beta)$ при разных ϑ_* и ϑ^* : $\vartheta_* = \vartheta^* = \infty$ (1); $\vartheta_* = \vartheta^* = 60^\circ$ (2); $\vartheta_* = \vartheta^* = 40^\circ$ (3); $\vartheta_* = 80^\circ$, $\vartheta^* = \infty$ (4); $\vartheta_* = 40^\circ$, $\vartheta^* = \infty$ (5)

Вычислительные эксперименты показали, что области течения, соответствующие решению рассматриваемой оптимизационной задачи для некоторых значений ϑ_* , ϑ^* и одного и того же значения β являются неоднолиственными. Например, для $\beta = 5^\circ$, $\vartheta_* = \vartheta^* = 40^\circ$ или $\vartheta_* = \vartheta^* = 20^\circ$ нижняя поверхность профилей расположена над верхней. Подчеркнем, что названные решения реализуют краевой экстремум: на одной части границы скорость достигает звукового значения, а на оставшейся части постоянен аргумент вектора скорости. При этом $M_\infty = 0,899$ и $M_\infty = 0,897$ соответственно.

Замечание 5.2. Для случая несжимаемой жидкости ($c^2 = 0$) имеем следующую простую оценку максимального значения v_{\max} скорости на профиле по отношению к скорости v_∞ набегающего потока:

$$\frac{v_{\max}}{v_\infty} \geq \left[\frac{(B_0 + 1)}{(B_0 - 1)} \right]^{m/2}, \quad B_0 = \frac{m[k^2 - \sin^2 \beta + m^{-2}]^{1/2}}{k \sin \beta}.$$

Отметим еще одно следствие неравенств (5.4.5) для случая ИНЖ. Взяв $c^2 = 0$, получим

$$c_0 = 0, \quad T_* = -\sin \beta, \quad T_{**} = -2 \sin \beta.$$

Обозначим через v_{\max}^* минимальное значение величины v_{\max} максимальной скорости на множестве профилей, обтекаемых с заданными

параметрами v_∞ и β . Тогда из неравенств (5.4.5) следует, что

$$\sin \beta \leq \ln \frac{v_{\max}^*}{v_\infty} \leq 2 \sin \beta$$

и, в частности, для любого профиля, обтекаемого ИНЖ и имеющего угол отклонения от направления бесциркуляционного обтекания, равный β , имеет место оценка

$$\frac{v_{\max}}{v_\infty} \geq \exp(\sin \beta).$$

При $\beta = 0$ получим очевидное неравенство $v_{\max} \geq v_\infty$.

5.4.4. Оптимизированные профили. Построение дозвуковых профилей для значений M_∞ , близких к максимально возможному значению $M^*(\beta)$, представляет практический интерес. Как было отмечено, при нахождении $M^*(\beta)$ не учитывались условия самонепересекаемости контура L_z . Вычислительные эксперименты показали, что при приближении M_∞ к $M^*(\beta)$ дозвуковое обтекание возможно лишь для однолистных профилей. Приведем один такой пример.

Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon = 2$ (кромки A и B — бесконечно тонкие) и возьмем $S(\gamma)$ в виде

$$S(\gamma) = S_t(\gamma) \equiv T + g_t(\gamma), \quad (5.4.6)$$

$$g_t(\gamma) = \frac{2|A(T, \beta)|[1 - t + \sin(\gamma - \beta)]}{1 + (1 - t)^2 + 2(1 - t)\sin(\gamma - \beta)}.$$

Такой выбор функции $S(\gamma)$ объясняется тем, что при $t \rightarrow 0$ функция $S_t(\gamma)$ стремится по норме пространства L_2 к функции $S_0(\gamma)$, для которой $M_\infty = M^*(\beta)$. Значение T и соответствующую величину M_∞ найдем из условия

$$\max_{\gamma} S_t(\gamma) = c_0,$$

эквивалентного уравнению

$$T - c_0 + \frac{2D(T, \beta)}{2 - t} = 0.$$

На рис. 5.32 представлен однолистный профиль, построенный для функции $S_t(\gamma)$ вида (5.4.6) при $t = 0,3$, $\beta = 0,17$ (10°) (линии 1 и 2 — соответственно верхняя и нижняя поверхности). Хордовая диаграмма скорости $\lambda(x)$ изображена линиями 3 и 4. В этом примере $M_\infty = 0,78$, что лишь на 3,7 % меньше максимально возможного значения $M^*(0,17) = 0,81$. Расчеты показали, что при уменьшении t нижняя поверхность профиля все выше поднимается над верхней. Значение M_∞ при этом, разумеется, приближается к экстремальному. Таким образом, точкам, расположенным в нижней полукрестности линии 1 на рис. 5.28, соответствуют однолистные решения. Поэтому естественно попытаться найти однолистные профили с повышенным критическим числом Маха за счет аппроксимации $S_0(\gamma)$ функциями

из некоторого многопараметрического семейства. Приведем один из вариантов реализации этой идеи.

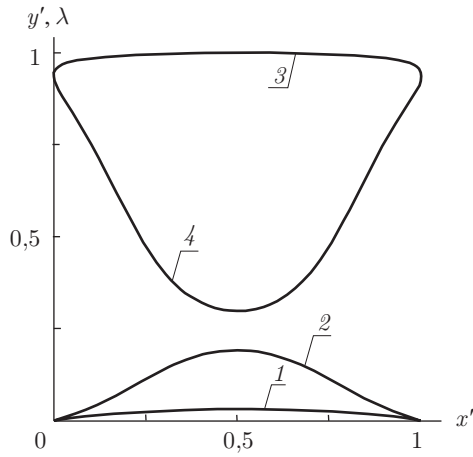


Рис. 5.32. Неоднолистное течение для оптимизированного решения из параметрического класса

Возьмем функцию $S(\gamma)$ в виде

$$S(\gamma) = S_t(\gamma; r_1, r_2) \equiv T + g_t(\gamma) + \operatorname{Re} \left[(2 - \varepsilon) \ln \frac{\zeta - 1}{\zeta - r_2} + (2 - \varepsilon_1) \ln \frac{\zeta + e^{2i\beta}}{\zeta + r_1 e^{2i\beta}} \right] \Big|_{\zeta = e^{i\gamma}}. \quad (5.4.7)$$

Параметры $r_1, r_2 \in (0, 1)$ позволят повлиять соответственно на толщину передней и задней кромок. При $r_1 \rightarrow 1$ и $r_2 \rightarrow 1$ функция (5.4.7) неограниченно приближается к функции (5.4.6) по норме пространства L_2 . Положим $\varepsilon_1 = 1$ (передняя кромка A закругленная), $\varepsilon = 2$ (задняя кромка B бесконечно тонкая) и выберем $t = 0,3$, $\beta = 0,05$ (3°), $r_1 = 0,8$. Величину T и соответствующее значение M_∞ найдем из условия $\max_\gamma \lambda(\gamma) = 1$.

На рис. 5.33, б представлен профиль с относительной толщиной $t_{\max} = 10,9\%$, построенный описанным способом. Распределение скорости $\lambda(s)$ на его поверхности изображено сплошной кривой 1 на рис. 5.33, а. Рассчитанные значения коэффициента подъемной силы $C_y = 0,368$, угла атаки $\alpha = -1,06^\circ$, $M_\infty = 0,75$. Профиль имеет характерные для известных околосвуковых профилей протяженный участок почти постоянной скорости на верхней поверхности и форму задней кромки. Для проверки результатов проектирования при $M_\infty = 0,75$ и $\alpha = -1,06^\circ$ был проведен расчет обтекания построенного профиля в рамках адиабатического течения идеального газа. Рассчитанное распределение скорости (штриховая кривая 2 на рис. 5.33, а) незна-

чительно отличается от исходного. Величина C_y получилась равной 0,389. Отметим, что $\lambda_{\max} = 1,05$, т.е. на профиле имеется небольшая

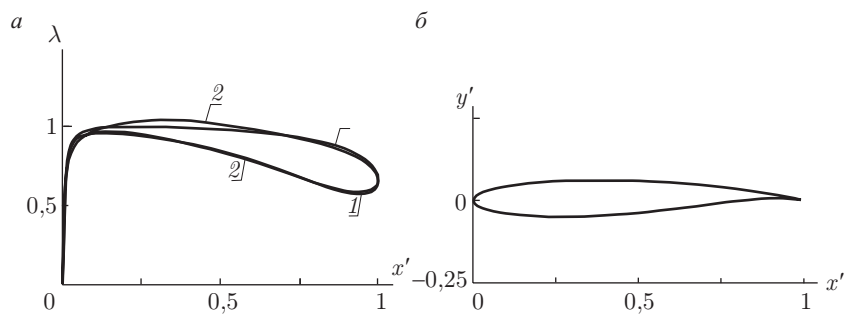


Рис. 5.33. Однолистное течение для оптимизированного решения из параметрического класса: *a* — оптимизированное распределение скорости (1) и распределение скорости, полученное из решения прямой задачи (2); *б* — оптимизированный профиль

сверхзвуковая зона. Однако, как следует из представленных результатов, обтекание профиля безударное. Таким образом, профиль, соответствующий функции $S(\gamma)$ вида (5.4.7), обладает высоким значением M_∞ , причем его характеристики подтверждены в результате решения прямой задачи.

Интересным представляется более подробное изучение свойств профилей выделенного класса. Далее будем полагать $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon = 2$. В этом случае формула (5.4.7) определит семейство профилей, зависящее от трех параметров β , t и r_1 . С практической точки зрения для проектирования околозвуковых профилей важно выявить зависимости между параметрами M_∞ , C_y и t_{\max} , имеющими физический смысл. Серии расчетов позволили построить диаграммы зависимости M_∞ от C_y для различных значений t_{\max} . Некоторые из них представлены на рис. 5.34, где кривые 1–3 соответствуют значениям $t_{\max} = 10\%$, 20% и 30% . Эти диаграммы позволяют для фиксированной толщины t_{\max} и заданного значения C_y найти максимальное значение M_∞ , которое

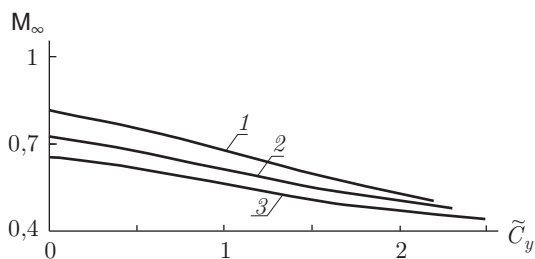


Рис. 5.34. Диаграммы зависимости M_∞ от C_y для различных значений t_{\max}

может быть реализовано для профилей рассматриваемого класса при условии их дозвукового обтекания. Например, для $t_{\max} = 13\%$, $C_y = 0$ из соответствующей диаграммы находим $M_\infty = 0,808$. Для сравнения, один из известных безударных симметричных профилей [112] с относительной толщиной $t_{\max} = 13\%$ при $M_\infty = 0,8$ обтекается уже трансзвуковым потоком.

Приведенное и другие сопоставления показали, что рассматриваемые профили имеют повышенное критическое значение M_∞ . Следовательно, построенные диаграммы можно использовать для оценки критического числа M^* , достижимого на реальных профилях. Профили представленного класса могут быть взяты за основу при проектировании высокоскоростных безударных профилей.

Описанный способ оценки критического числа Маха переносится на случай обтекания решеток профилей (см. [8, 35]).

5.5. Исторические замечания и библиографические ссылки

5.5.1. Постановка вариационных задач и построение оптимизируемых функционалов. Постановка вариационных ОКЗА для дозвукового течения вязкого газа в рамках моделей Чаплыгина и ПС впервые предложена в [45, 46] и подробно описана в [35]. При построении функционалов, минимизация которых эквивалентна минимизации профильного сопротивления и максимизации аэродинамического качества, могут быть использованы различные варианты выбора эмпирических постоянных, связанных с расчетом ПС. Схема аналитической записи этих функционалов предложена А. М. Елизаровым и реализована в [35]. Другой вид аналитического представления функционала для аэродинамического качества, основанный на той же схеме, содержится в [90].

Теорема Куна–Таккера для точной оценки сверху функционала, выражающего аэродинамическое качество, применена в [31].

Теорема 5.1, дающая оценку максимального значения величины λ_∞ , обеспечивающей дозвуковое обтекание, и существенно использованная при решении задачи максимизации критического числа Маха, доказана в [7] (см. также [97]).

5.5.2. Свойства функционалов. Точные оценки. Способ нахождения функции (5.1.38), описанной в замечании 5.1, предложен Д. А. Фокиным [9], однако им не было учтено ограничение (5.1.39). Поэтому участок $\beta \geq \arcsin[1/(b-1)]$ на графиках зависимости $K = K_*(\beta)$, представленных в [9], должен быть отброшен. Уточненные графики этой зависимости представлены на рис. 5.3.

5.5.3. Условия однолиственности решения. Эмпирическое наблюдение, связанное с выводом упрощенного достаточного условия од-

нолистности (5.1.54) и описанное в п. 5.1.6, впервые было сделано Е. В. Федоровым. Условие (5.1.54) вместе с упрощенным условием безотрывности (5.1.51) было реализовано им в вычислительных экспериментах по решению вариационных ОКЗА в кандидатской диссертации (1992 г.).

5.5.4. Профили максимальной подъемной силы в газе Чаплыгина. Точное решение основной вариационной ОКЗА в рамках модели газа Чаплыгина получено в работах [52, 107]. Многочисленные вычислительные эксперименты по реализации как точных, так и численных решений, а также их сравнение и анализ результатов проведены А. Н. Ихсановой в ее кандидатской диссертации (2004 г.).

5.5.5. Задачи с ограничениями на аэродинамические параметры. Серии вычислительных экспериментов по решению вариационных задач, описанных в п. 5.3.3 и п. 5.3.4, выполнены Е. В. Федоровым. Таким образом, имеются решения целого спектра оптимизационных задач, которые связаны с минимизацией описанных выше функционалов и различаются набором дополнительных ограничений. В частности, это задачи оптимизации в диапазоне углов атаки, задачи с ограничениями на коэффициенты C_y и C_x и ряд других (см. [35]).

5.5.6. Максимизация критического числа Маха. Форма плоских и пространственных тел, удовлетворяющих ряду геометрических ограничений и обтекаемых с максимальным M^* идеальным газом, изучена в симметричном случае. Гильбарг и Шиффман [114] рассмотрели конфигурации, имеющие фиксированную длину и плоскость или ось симметрии, параллельную скорости набегающего потока. В качестве геометрических ограничений задавались минимально допустимое значение толщины и объем тела (в плоском случае площадь). Рассмотрен также случай, когда при фиксированной площади задана часть контура, например носовой и кормовой участки. Доказано, что образующие оптимальных конфигураций состоят из горизонтальных торцов или заданных участков контура и гладко стыкующихся с ними линий тока, на которых число Маха $M = 1$. Работа [114] стала первой в ряду исследований по построению тел, обтекаемых с максимальным M^* , при различных ограничениях (см., например, [63, 64]), которые продолжают и в настоящее время.

Оценка M^* в зависимости от геометрических характеристик выбранного класса профилей получена лишь в работе Левнера [122] (описание этого результата содержится также в [15, с. 90]). В ней рассмотрено множество симметричных профилей с острой передней кромкой, у которых угол наклона касательной к контуру ограничен числом $\pi/(2\omega)$, $\omega > 1$. Указанная оценка имеет вид $M^* < C^{1/(\omega+1)}$, где постоянная $C \in (0, 1)$ и однозначно определяется уравнением контура.

В разд. 5.4 рассмотрена задача оценки критического числа Маха на различных классах аэродинамических форм. Основные идеи применяемого подхода изложены в работах [7, 9] (см. также [35]).

Отметим также, что способ задания управляющей функции в виде (5.4.7), неограниченно приближающейся по норме L_2 к экстремальной функции и дающей точную оценку M^* , но неоднолистную область течения, предложен Д.А. Фокиным и численно реализован им при построении аэродинамических форм, близких к оптимальным. Один из таких примеров представлен на рис. 5.33.

Способ оценки критического числа Маха для изолированного профиля, описанный в разд. 5.4, переносится на случай обтекания решеток профилей [8, 97] (см. также [35]).

ОПТИМАЛЬНЫЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИ ЦЕЛЕСООБРАЗНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ В ОКЗА

Один из подходов к оптимизации формы на основе теории ОКЗ состоит в оптимальном выборе краевых условий в обратной задаче с учетом их гидродинамической целесообразности и соответствия выбранной математической модели течения. В настоящей главе этот подход реализован на примере ОКЗА.

Как отмечено выше, исходным в ОКЗА является распределение скорости $v(s)$, определяющее величину подъемной силы. Поэтому один из способов аэродинамической оптимизации крыловых профилей состоит в оптимальном выборе функции $v(s)$. Но при этом возникает существенный вопрос, при каких ограничениях (гидродинамических, конструктивных и других) этот выбор проводить.

Прежде всего, исходное распределение скорости должно удовлетворять требованиям гидродинамической целесообразности, т.е. таким ограничениям, которые обеспечат соответствие решения ОКЗА математической модели, принятой в постановке задачи. Далее, необходимо учесть условия замкнутости и простоты контура L_z , а также некоторые конструктивные ограничения (на толщину профиля, кривизну L_z и другие). Названные условия физической и конструктивной реализуемости решения определяют множество **гидродинамически целесообразных распределений скорости** (ГЦРС). Именно в нем нужно выбирать функции $v(s)$, которые соответствуют оптимизированным свойствам искомого решения. Таковыми являются, например, свойства максимизации подъемной силы и аэродинамического качества, минимизации сопротивления.

Требования физической и конструктивной реализуемости трудно полностью разделить. Кроме того, невозможно наилучшим образом выполнить их все одновременно. Наиболее полный учет всех условий является основной задачей при выборе оптимальных ГЦРС.

6.1. Задание безотрывных распределений скорости

Одно из основных требований гидродинамической целесообразности вытекает из принятой в ОКЗА схемы плавного обтекания: функцию $v(s)$ нужно задать так, чтобы течение было безотрывным. Однако для получения решения необходимо, чтобы выбранное распределение скорости удовлетворяло условиям разрешимости ОКЗА. Это существенно ограничивает рамки применимости описанного способа оптимизации,

но в некоторых случаях позволяет с успехом найти оптимизированные формы.

Самый простой способ задания безотрывных распределений скорости на диффузорном участке контура L_z (участке убывания скорости) основан на анализе предотрывного состояния. В этом случае неравенства (1.3.3) и (1.3.8) становятся равенствами. В результате имеем дифференциальное или интегродифференциальное уравнение для нахождения распределения $v(s)$ на соответствующем интервале. Построим такое распределение для диффузорного участка верхней поверхности профиля с бесконечно тонкой задней кромкой (случай нижней поверхности может быть рассмотрен аналогично).

6.1.1. Полочные распределения. Пусть на верхней поверхности профиля имеется конфузорный участок (участок возрастания скорости) от точки A разветвления потока с дуговой абсциссой $s_* \in [0, L]$ до точки, в которой скорость достигает некоторого максимального значения v_{\max} . Затем идет диффузорный участок (участок торможения), где скорость убывает до значения $v_* < v_\infty$.

Как отмечено в [81, с. 399], для предотрывного состояния турбулентного ПС на всем диффузорном участке справедлива зависимость

$$\delta^{**}(s) = \left[\frac{v_{\max}}{v(s)} \right]^{2+H} \delta_1^{**}, \quad (6.1.1)$$

удовлетворительно согласующаяся с экспериментальными данными. Здесь $\delta_1^{**} = \delta^{**}(s_1)$, $s_1 \in (s_*, L)$ — дуговая абсцисса начала участка убывания скорости, H — постоянная величина, которую, в частности, можно взять равной $(2m+1)/(2m-1)$ (смысл параметра m объяснен выше, см. п. 1.3.1). Формула (6.1.1) выражает связь между $v_{\max} = v(s_1)$, введенными выше величинами и толщиной потери импульса δ_1^{**} . Из формул (1.3.1) и (6.1.1) следует уравнение

$$-[v(s)]^{-(k+1)} v'(s) = B v_{\max}^{-k} (\delta_1^{**})^{-1} (\text{Re}_1^{**})^{-1/m}, \quad (6.1.2)$$

где $k = a(H+2) - 1/m$, $\text{Re}_1^{**} = v_{\max} \delta_1^{**} / \nu$. Проинтегрировав равенство (6.1.2) в пределах от s_1 до s , получим

$$v(s) = v_{\max} [1 + k B (s - s_1) (\delta_1^{**})^{-1} (\text{Re}_1^{**})^{-1/m}]^{-1/k}. \quad (6.1.3)$$

Из соотношения (1.3.7) найдем

$$\delta_1^{**} (\text{Re}_1^{**})^{1/m} = v_{\max}^{1-b} \left[a A \int_{s_t}^{s_1} |v(\tau)|^{b-1} d\tau + v_t^{b-1} \delta_t^{**} (\text{Re}_t^{**})^{1/m} \right]. \quad (6.1.4)$$

Для полностью турбулентного слоя $s_t = s_*$, $v_t = 0$.

Предположим, что на интервале $[s_*, s_1]$ функция $v(s)$ равна v_{\max} всюду, за исключением небольшого участка $[s_*, s_0]$, $s_0 = s_* + \Delta$, на котором скорость монотонно возрастает, т.е. рассмотрим распределения $v(s)$ полочного типа. Учтя малость Δ , для полностью турбулентного

ПС заменим интеграл в (6.1.4) постоянным значением $v_{\max}^{b-1}(s_1 - s_0)$. В результате из формулы (6.1.3) получим следующее представление для безотрывного распределения $v(s)$ на диффузорном участке:

$$v(s) = v_{\max} \left[1 + D \frac{s - s_1}{s_1 - s_0} \right]^{-1/k}, \quad D = -\frac{k f_0}{a} \quad s \in [s_1, L]. \quad (6.1.5)$$

Значения постоянных D и k для различных m , f_0 приведены в таблице (смысл параметра Z_* будет объяснен ниже в п. 6.2.2). Отметим, что $D \approx 1 - 3f_0$ с максимальной погрешностью 3% (при $m = 4$).

Параметры полочных распределений

m	4	6	∞
f_0	-5,57 — -4,78	-3,06 — -1,99	-0,83 — -0,67
D	18,2 — 15,7	10,3 — 7,05	3,5 — 3,0
k	5,08 — 4,12	3,93 — 4,13	4,20 — 4,50
Z_*	2,25 — 2,20	2,19 — 2,04	2,05 — 1,98

6.1.2. Заданное распределение формпараметра. Опишем теперь способ построения безотрывных распределений скорости на диффузорном участке, основанный на задании на этом участке распределения формпараметра $f = f(s)$. Ясно, что если функция $f(s)$ будет удовлетворять неравенствам $f_0 \leq f(s) \leq 0$, то соответствующая ей функция $v(s)$ будет удовлетворять условию безотрывности, хотя не обязательно будет описывать предотрывное состояние. Поэтому рассматриваемый способ позволит построить распределения скорости с некоторым запасом безотрывности.

Введем безразмерную координату $\sigma = (s - s_*)/(L - s_*)$, $\sigma \in [0, 1]$. Пусть на конфузорном участке $\sigma \in [0, \sigma_0]$ задано непрерывное монотонное распределение $v = u(\sigma)$, причем переход ламинарного ПС в турбулентный происходит в точке $\sigma_i \in [0, \sigma_0]$. Достроим распределение $v(\sigma)$, $v(\sigma_0) = u(\sigma_0) = v_{\max}$, на диффузорном участке $[\sigma_0, 1]$ так, чтобы на нем формпараметр f из (1.3.5) изменялся по заданному закону $f = g(\sigma)$, где $g(\sigma) \in [f_0, 0]$ — кусочно-непрерывная функция.

С учетом выражения (1.3.5) интегродифференциальное уравнение для нахождения функции $v(\sigma)$ по заданной функции $g(\sigma)$ примет вид

$$\frac{a v'(\sigma)}{|v(\sigma)|^b} \left| \int_{\sigma_0}^{\sigma} |v(\tau)|^{b-1} d\tau + C_0 \right| = g(\sigma), \quad \sigma \in [\sigma_0, 1]. \quad (6.1.6)$$

Величина C_0 в (6.1.6) согласно соотношениям (1.3.5), (1.3.6) определяется по формуле

$$C_0 = \int_{\sigma_t}^{\sigma_0} |u(\tau)|^{b-1} d\tau + \frac{\nu v_t^{b-2} (\text{Re}_t^{**})^a}{aA}. \quad (6.1.7)$$

Здесь $\sigma_t = (s_t - s_*)/(L - s_*)$ — безразмерная координата точки перехода ламинарного ПС в турбулентный, $v_t = u(\sigma_t)$, а величина Re_t^{**} определена в (1.3.7). В случае полностью турбулентного ПС в выражении (6.1.7) нужно положить $\sigma_t = 0$, $v_t = 0$. Напомним, что в общем случае величина σ_t по заданной функции $u(\sigma)$ может быть найдена из условия (1.3.9).

Обозначим

$$Q(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \left[1 - \frac{(b-1)g(\tau)}{a} \right] d\tau + C_0 v_{\max}^{1-b}, \quad (6.1.8)$$

$$\Phi(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} |v(\tau)|^{b-1} d\tau + C_0. \quad (6.1.9)$$

В силу (6.1.9) имеем

$$\frac{\Phi''(\sigma)}{[\Phi'(\sigma)]^2} = \frac{(b-1)v'(\sigma)}{[v(\sigma)]^b}.$$

Следовательно, уравнение (6.1.6) примет вид

$$\left[\frac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)} \right]' = 1 - \frac{(b-1)g(\sigma)}{a}.$$

Проинтегрировав это равенство в пределах от σ_0 до σ и учтя, что $\Phi(\sigma_0)/\Phi'(\sigma_0) = C_0 v_{\max}^{1-b}$, получим

$$\frac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)} = Q(\sigma). \quad (6.1.10)$$

Из формулы (6.1.6) следует, что $\Phi(\sigma) = g(\sigma)[v(\sigma)]^b/[av'(\sigma)]$. Последнее равенство и формула (6.1.10) позволяют записать обыкновенное дифференциальное уравнение для нахождения функции $v(\sigma)$:

$$\frac{d}{d\sigma} \ln v(\sigma) = \frac{g(\sigma)}{aQ(\sigma)}.$$

Решив его, окончательно получим

$$v(\sigma) = v_{\max} \exp \left\{ a^{-1} \int_{\sigma_0}^{\sigma} g(\tau)[Q(\tau)]^{-1} d\tau \right\}, \quad \sigma \in [\sigma_0, 1]. \quad (6.1.11)$$

Таким образом, при заданных функциях $u(\sigma)$ и $g(\sigma)$ формулы (6.1.8), (6.1.11) задают безотрывное распределение скорости, имеющее на диффузорном участке желаемое распределение формпараметра f .

В заключение укажем другое представление функции $v(\sigma)$, эквивалентное (6.1.11).

Из формулы (6.1.8) следует, что $g(\sigma) = a[1 - Q'(\sigma)]/(b - 1)$. Подставив это выражение в формулу (6.1.11) и проинтегрировав с учетом условия $Q(\sigma_0) = C_0 v_{\max}^{1-b}$, получим

$$v(\sigma) = C_0^n [Q(\sigma)]^{-n} \exp \left\{ n \int_{\sigma_0}^{\sigma} [Q(\tau)]^{-1} d\tau \right\}, \quad n = 1/(b - 1). \quad (6.1.12)$$

Формула (6.1.12) выражает безотрывные распределения скорости через функцию $Q(\sigma)$ для достаточно широких классов распределений $g(\sigma)$ формпараметра f . В частности, если $g(\sigma) \in [f_0, 0]$ — измеримая функция, то из представления (6.1.8) выведем, что $Q(\sigma)$ — строго положительная возрастающая абсолютно непрерывная функция. Следовательно, функция $Q(\sigma)$ дифференцируема почти всюду. Таким же будет распределение $v(\sigma)$ в (6.1.12). Значит, множеству измеримых неположительных ограниченных снизу функций $g(\sigma)$ соответствует класс почти всюду гладких безотрывных распределений скорости $v(\sigma)$. Если же потребовать, чтобы функция $v(\sigma)$ принимала фиксированное значение v_* в задней кромке, то функция $Q(\sigma)$ должна удовлетворять дополнительному ограничению

$$\int_{\sigma_0}^1 [Q(\tau)]^{-1} d\tau = \ln Q(1) + \ln \left(\frac{v_*^{b-1}}{C_0} \right). \quad (6.1.13)$$

Для турбулентного ПС и $g(\sigma)=0$ при $\sigma \in [0, \sigma_1]$, $g(\sigma) = f_0$ при $\sigma \in [\sigma_1, 1]$, где величина σ_1 найдена из условия (6.1.13), получим точно формулу (6.1.5), где $k = b - 1 - a/f_0$.

6.2. Максимизация подъемной силы

Для увеличения циркуляции Γ и, следовательно, подъемной силы, необходимо максимизировать на верхней поверхности профиля площадь эпюры безотрывных распределений скорости, построенных выше.

Предположим, что скорость $v(s) = u(s)$ при $s \in [s_*, s_1]$, где функция $u(s)$ дифференцируема почти всюду и монотонно возрастает от $u = 0$ в точке $s = s_*$ разветвления потока до значения v_{\max} в точке $s = s_1$ (участок разгона), а на участке торможения $[s_1, L]$ либо функция $v(s)$ имеет вид (6.1.11) и соответствует заданному распределению $g(s)$ формпараметра $f(s)$, либо задано безотрывное распределение (6.1.5), причем во втором случае на интервале $s \in [s_0, s_1]$, $s_0 = s_* + \Delta$, имеется полка $v \equiv v_{\max}$, а Δ мало. Напомним, что именно при таком дополнительном условии была построена формула (6.1.5).

Рассмотрим сначала первый случай.

6.2.1. Заданное распределение формпараметра. Пусть на участке торможения $[s_1, L]$ верхней поверхности профиля функция $v(s)$ имеет вид (6.1.11) и соответствует заданному распределению $f = g(s)$ формпараметра f . Среди всевозможных функций $g(s)$ найдем ту, которая максимизирует площадь эпюры распределения $v(s)$. Для этого понадобится решение следующей вспомогательной задачи.

Пусть $\sigma(s) = (s - s_*)/(L - s_*) \in [\sigma_0, 1]$, $\sigma_0 = \sigma(s_0)$, а $g(\sigma)$ — измеримая функция, удовлетворяющая неравенствам

$$f_0 \leq g(\sigma) \leq 0, \quad f_0 < 0. \quad (6.2.1)$$

Обозначим

$$Q(F; \sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} F(\tau) d\tau + C, \quad \sigma \in [\sigma_0, 1], \quad (6.2.2)$$

где постоянная $C > 0$, функция $F(\sigma) = 1 - (b-1)g(\sigma)/a$ и в силу условия (6.2.1) выполнены неравенства

$$1 \leq F(\sigma) \leq p_0 \equiv 1 - \frac{(b-1)f_0}{a}. \quad (6.2.3)$$

Отметим, что $Q(F; \sigma) = Q(\sigma)$ при $C = C_0 v_{\max}^{1-b}$ (см. (6.1.8)). Пусть, далее,

$$g_*(\sigma) = \begin{cases} 0, & \sigma \in [\sigma_0, \sigma_1], \\ f_0, & \sigma \in [\sigma_1, 1], \end{cases} \quad (6.2.4)$$

где σ_1 — фиксированная величина. Рассмотрим вариационную задачу: для каждого значения $\sigma \in [\sigma_0, 1]$ найти функцию

$$G(\sigma) = \inf_{F \in U} Q(F; \sigma), \quad (6.2.5)$$

где множество U определено неравенствами (6.2.3) и ограничением

$$Q(F; 1) = C_1 \exp \left\{ \int_{\sigma_0}^1 [Q(F; \tau)]^{-1} d\tau \right\}, \quad (6.2.6)$$

причем постоянная $C_1 \geq C$.

Имеет место (см. [35]) следующее утверждение.

Лемма 6.1. Если

$$Q(F; 1) \geq Q_*(1), \quad (6.2.7)$$

где величина $Q_*(\sigma) = Q(F_*; \sigma)$ определена формулой (6.2.2) при

$$F(\sigma) = F_*(\sigma) \equiv 1 - \frac{(b-1)g_*(\sigma)}{a},$$

а постоянная σ_1 в (6.2.4) такова, что $F_*(\sigma) \in U$, то $G(\sigma) = Q_*(\sigma)$ для всех $\sigma \in [\sigma_0, 1]$.

Замечание 6.1. Ограничение (6.2.7) для утверждения леммы является существенным, так как при его невыполнении нижняя грань

в (6.2.5) для разных σ достигается на различных функциях $F(\sigma)$ из U .

Основным результатом настоящего раздела является следующее утверждение, подробно доказанное в [35].

Теорема 6.1. Пусть распределение $g(\sigma)$ формпараметра f на диффузорном участке $[\sigma_0, 1]$ удовлетворяет следующим ограничениям:

$$g(\sigma) \in [f_0, 0], \quad \left| \int_{\sigma_0}^1 g(\tau) d\tau \right| \geq B_0, \quad B_0 = -f_0(1 - \sigma_1), \quad (6.2.8)$$

$$Q(F; 1) = C \exp \left\{ \int_{\sigma_0}^1 [Q(F; \tau)]^{-1} d\tau \right\}, \quad (6.2.9)$$

где $F(\sigma) = 1 - g(\sigma)/(an)$, $g(\sigma)$ — измеримая функция, функция $Q(F; \sigma)$ определена в (6.2.2), $C = C_0 v_*^{1-b}$, эмпирические постоянные a , $n = (b-1)^{-1}$ и f_0 связаны с выбором условия безотрывности обтекания, а постоянная C_0 характеризует вклад ламинарных участков ПС и определена формулой (6.1.7). Тогда экстремальной функцией, доставляющей максимум площади эпюры $v(\sigma)$ на классе распределений (6.1.12), является функция $g_*(\sigma)$ из (6.2.4), причем

$$\sigma_1 = \frac{p_0 - (C - \sigma_0)(Z^k - 1)}{p_0 + Z^k - 1}, \quad (6.2.10)$$

$$Z = \frac{v_{\max}}{v_*}, \quad k = b - 1 - \frac{a}{f_0} > 0, \quad p_0 = 1 - \frac{f_0(b-1)}{a} = -\frac{k f_0}{a} > 0.$$

Замечание 6.2. Экстремальное распределение $v(\sigma)$, указанное в теореме 6.1, имеет следующее представление, вытекающее из (6.1.11) :

$$v(\sigma) = \begin{cases} v_{\max}, & \sigma \in [\sigma_0, \sigma_1], \\ v_{\max} \left(1 + D_1 \frac{\sigma - \sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_0} \right)^{-1/k}, & \sigma \in [\sigma_1, 1], \end{cases} \quad (6.2.11)$$

где

$$D_1 = \frac{p_0(\sigma_1 - \sigma_0)}{C_0 v_{\max}^{1-b} + \sigma_1 - \sigma_0}, \quad k = b - 1 - \frac{a}{f_0}$$

и постоянная C_0 учитывает влияние ламинарного ПС на части $[0, \sigma_t]$ конфузорного участка (см. (6.1.74)). Для полностью турбулентного ПС

$$C_0 v_{\max}^{1-b} = \int_0^{\sigma_0} [\tilde{u}(\sigma)]^{b-1} d\sigma,$$

где $\tilde{u}(\sigma) = u(\sigma)/v_{\max}$, а $u(\sigma)$ — заданное монотонное распределение $v(\sigma)$ на интервале $[0, \sigma_0]$. В силу малости σ_0 можно считать $D_1 = p_0$. В результате из (6.2.11) получим в точности формулу (6.1.5).

Итак, из теоремы 6.1 следует, что при фиксированных значениях v_{\max} и v_* полочные распределения являются экстремальными в смысле максимизации площади эпюры S для целого класса безотрывных распределений $v(s)$, характеризуемых заданными значениями формпараметра. Теперь естественно возникает вопрос, существует ли среди полочных распределений такое, которое обладает максимальной площадью эпюры.

6.2.2. Оптимизированные полочные распределения скорости.

Теорема 6.2. Пусть фиксированы длина σ_0 участка монотонного возрастания скорости и значение v_* скорости в задней кромке. Тогда существует единственное распределение скорости вида (6.2.11), максимизирующее площадь эпюры распределения скорости $v(\sigma)$ на интервале $[\sigma_0, 1]$.

Доказательство. Запишем выражение для максимизируемой площади

$$S = \int_{\sigma_0}^1 v(\tau) d\tau = v_{\max}(\sigma_1 - \sigma_0) \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{k}{D_1(k-1)} \left[\left(1 + D_1 \frac{1 - \sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_0} \right)^{1-1/k} - 1 \right] \right\}. \quad (6.2.12)$$

Условие $v(1) = v_*$ примет вид

$$\sigma_1 = \frac{D_1 + (Z^k - 1)\sigma_0}{Z^k - 1 + D_1}, \quad Z = \frac{v_{\max}}{v_*}.$$

Подставив это выражение в формулу (6.2.12), получим

$$S = S(Z) = v_*(1 - \sigma_0)(k-1)^{-1} h_1(Z), \quad Z \geq 1,$$

где функция

$$h_1(Z) = \frac{Z[kZ^{k-1} + (k-1)D_1 - k]}{Z^k - 1 + D_1}$$

и имеет глобальный максимум в точке $Z = Z_*$, причем Z_* — единственный корень уравнения

$$Z^k + a_1 Z^{k-1} + b_1 = 0, \quad (6.2.13)$$

$$a_1 = \frac{k^2(D_1 - 1)}{(k-1)[k - (k-1)D_1]}, \quad b_1 = \frac{D_1 - 1}{1 - k}.$$

Значения Z_* для различных наборов постоянных m и f_0 при $\sigma_0 = 0$ приведены в таблице.

Итак, максимизации S соответствует единственный выбор $v_{\max} = v_* Z_*$. Теорема доказана.

Из теоремы 6.2 следует, что при фиксированном значении v_* среди полочных распределений существует единственное максимизирующее

площадь S . Следовательно, выбрав величину v_{\max} так, как указано в теореме 6.2, получим оптимальное полочное распределение, которое будет экстремальным уже в классе безотрывных распределений $v(s)$ с переменной величиной v_{\max} и заданными функцией $u_0(\sigma)$ и параметром v_* .

6.3. Диапазон углов атаки

6.3.1. Анализ схем задания исходных данных. Так как функции $v_j(s)$ могут быть заданы по любой из трех указанных выше схем (см. п. 1.5.1), необходимо выделить схему, оптимальную для максимизации подъемной силы. Доказана [35] следующая теорема.

Теорема 6.3. Пусть фиксированы значения $\Delta\varphi_j$ и v_{j*} , $j = 1, 2$. Тогда:

1) Если $\cos \delta \leq a_* \leq \sec \delta$, то $\Gamma_1 > 0$, $\Gamma_2 < 0$ и вариант $a^* = 0$ ($v_2(s_0) = 0$) задания исходных данных соответствует максимизации величины Γ_1 и минимизации $|\Gamma_2|$ в схеме 3, минимизации как Γ_1 , так и $|\Gamma_2|$ в схеме 1, а вариант $a^* = \infty$ ($v_1(s_0) = 0$) — минимизации Γ_1 и максимизации $|\Gamma_2|$ в схеме 2;

2) Если $a_* > \sec \delta$, то $\Gamma_1 > 0$, $\Gamma_2 > 0$ и случай $a^* = 0$ дает максимум Γ_1 и минимум Γ_2 в схеме 3, минимумы Γ_1 и Γ_2 в схеме 1; случай $a^* = \infty$ соответствует минимуму Γ_1 и максимуму Γ_2 в схеме 3 и минимуму Γ_1 в схеме 2.

Из приведенного утверждения следует, что при построении крыловых профилей для заданного диапазона изменения углов атаки с целью максимизации величины Y подъемной силы для наибольшего значения $\alpha = \alpha_1$ угла атаки и минимизации Y для наименьшего значения $\alpha = \alpha_2$ целесообразно использовать предельный случай $a^* = 0$ схемы 3 задания исходных распределений скорости $v_j(s)$, $j = 1, 2$ (он представлен сплошной линией на рис. 6.1). Если же необходимо максимизировать Y при $\alpha = \alpha_2$, то целесообразно рассматривать предельный случай схемы 3, соответствующий выбору $a_* > \sec \delta$, $a^* = \infty$.

Выбор оптимальной схемы задания распределений $v_j(s)$ в случае построения симметричных профилей представляет бóльшие трудности, так как условие симметрии накладывает дополнительные ограничения на функции $v_j(s)$, $j = 1, 2$. Если же $s_0 = L/2$, $k = 1$, $v_2(s) = -v_1(L - s)$, $s \in [0, L/2]$, то таким исходным данным всегда соответствует симметричный контур, причем $\beta_1 = -\beta_2 = \delta/2$, а условие совместимости начальных данных выполняется тождественно. В этом случае $\beta_0 = 0$, а для максимизации Γ_1 нужно максимизировать величину $\Delta\varphi_1$ на выбранном классе распределений $v_1(s)$. Таким образом, при построении симметричных профилей для задания функций $v_j(s)$ наиболее удобна схема 3 с $s_0 = L/2$ (она эскизно представлена штриховой кривой на рис. 6.1).

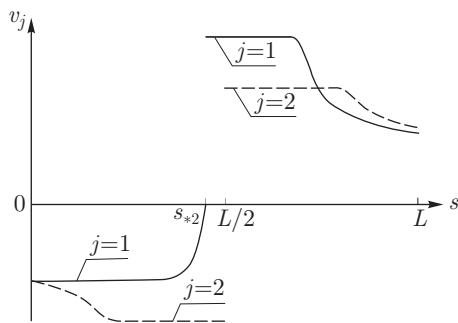


Рис. 6.1. Схемы задания исходных данных для максимизации подъемной силы

6.3.2. Максимизация подъемной силы. Критерий безотрывности (6.2.1), как и критерий (1.3.3), может быть использован при задании ГЦРС в ОКЗА для диапазона углов атаки. Однако здесь возникает дополнительная трудность — неизвестно положение точек s_{*j} разветвления потока. Для обеспечения безотрывности обтекания в этом случае попытаемся компенсировать недостаток информации о поведении функций $v_j(s)$ в окрестностях точек s_{*j} включением в формпараметр $g(s)$ запаса безотрывности.

Положим $\sigma_0 = s_0$, $C_0 = 0$ в формулах (6.1.6), (6.1.8) и (6.1.9). Теперь функции $v_j(s)$ вида (6.1.11) будут решениями интегродифференциального уравнения (6.1.6), видоизмененного указанным способом, и будут иметь на интервалах $[s_0, L]$ или $[0, s_0]$ заданное распределение $g(s)$ видоизмененного формпараметра

$$f(v_j; s) \equiv \frac{av'_j(s)}{|v_j(s)|^b} \left| \int_{s_0}^s |v_j(\tau)|^{b-1} d\tau \right|. \quad (6.3.1)$$

Далее, предположим, что распределения $v_j(s)$ продолжены монотонными функциями соответственно на интервалы $[s_{*1}, s_0]$ и $[s_0, s_{*2}]$. В этом случае при достаточно малых ($\sim 0,01-0,03$) величинах $|s_0 - s_{*j}|/L$ вид функций $v_j(s)$, как показал вычислительный эксперимент, незначительно сказывается на форме ПС. Это влияние можно учесть, потребовав выполнения условия $g(s) \geq \mu f_0$, где величина $\mu \in (0, 1)$ характеризует запас безотрывности, необходимый вследствие введенного упрощения. Если построенные таким образом распределения $v_j(s)$ будут удовлетворять условию (6.2.1), то соответствующий профиль (при совместности начальных данных и выполнении условий разрешимости) в рамках используемой модели течения будет безотрывным во всем диапазоне изменения угла атаки.

Для выбора оптимальных распределений $v_j(s)$ из классов ГЦРС, описанных выше, воспользуемся теоремой 6.1. Из нее следует, что при фиксированных значениях $v_{*1} = v_1(L)$, $v_{*2} = |v_2(0)|$ скоростей на задней кромке и максимальных величин скорости $v_{\max j} = \max |v_j(s)|$ рас-

пределения $v_j(s)$, максимизирующие площади эпюр на диффузорных участках, являются полочными и имеют вид (6.2.11), где постоянную C_0 нужно выбрать в соответствии с формулой (6.1.7). Положив $C_0 = 0$ и $g(s) = f_{0j} \equiv \mu_j f_*$, $\mu_j \in (0, 1)$, $j = 1, 2$, из формул (6.2.10), (6.2.11) выведем

$$v_1(s) = \begin{cases} v_{\max 1}, & s \in [s_0, s_1], \\ v_{\max 1} \left(1 + D_1 \frac{s - s_1}{s_1 - s_0}\right)^{-1/k_1}, & s \in [s_1, L], \end{cases} \quad (6.3.2)$$

$$v_2(s) = \begin{cases} -v_{\max 2}, & s \in [\tilde{s}_1, \tilde{s}_0], \\ -v_{\max 2} \left(1 + D_2 \frac{\tilde{s}_1 - s}{\tilde{s}_1 - \tilde{s}_0}\right)^{-1/k_2}, & s \in [0, \tilde{s}_1], \end{cases}$$

где

$$D_j = 1 - \frac{f_{0j}(b-1)}{a}, \quad l_j = s_0 + \frac{D_j[(2-j)L - s_0]}{Z_j^{k_j} - 1 + D_j}, \quad (6.3.3)$$

$$k_j = b - \frac{a}{f_{0j}}, \quad Z_j = \frac{v_{\max j}}{v_* j}, \quad j = 1, 2,$$

причем $l_1 = s_1$, $l_2 = \tilde{s}_1$. В силу монотонности функций $v_j(s)$ в (6.3.2) для продолжений этих функций на интервалы $[s_{*1}, s_0]$ и $[s_{*2}, s_0]$ будут выполнены неравенства $v'_j(s) \geq 0$, $j = 1, 2$, и, следовательно, справедливо предположение, положенное в основу использования видоизмененного формпараметра (6.3.1) вместо $f(v_j; s_{*j}, s)$ из формулы (1.3.13).

Исходные данные в виде (6.3.2), (6.3.3) легко реализовать при решении ОКЗА, а наличие нескольких параметров (v_{*j} , $v_{\max j}$, f_{0j}) позволит за счет их перебора добиться замкнутости искомого контура. Приведем несколько примеров таких профилей, построенных Д. А. Фокиным.

Пусть $s_0/L = 0,5$, $k = v_{\infty 1}/v_{\infty 2} = 1$, $v_2(s) = v_1(L - s)$. Таким исходным данным, как указано выше, соответствует симметричный контур, а условие совместимости начальных данных выполнится тождественно. На рис. 6.2, б в системе координат (1.1.2) изображен симметричный профиль с относительной толщиной $t_{\max} = 23,9\%$, построенный для $\delta = 10^\circ$, $f_{0j} = -6$ по распределениям $v_1(s)$, $s/L \in [0, 0,5]$, вида (6.3.2) и $v_2(s) = v_1(L - s)$, $s/L \in [0, 0,5]$ (соответственно сплошная линия 1 и штриховая линия 2 на рис. 6.2, а; линии 3 и 4 — рассчитанные распределения $v_1(s)$ и $v_2(s) = v_1(L - s)$ при $s/L \in [0, 0,5]$). Построенный профиль имеет $C_{y j} = \pm 0,64$ при $\alpha_j = \pm 5^\circ$ и в рамках принятой модели обтекает безотрывно в диапазоне изменения угла атаки от $\alpha_2 = -5^\circ$ до $\alpha_1 = 5^\circ$, что подтвердила рассчитанная зависимость $f_{\min}(\alpha) = \min_{s \in [0, L]} f(v; s_*, s)$ (значения $f_{\min}(\alpha)$ при всех α не вышли за пределы $[f_0, 0]$). В этом и следующем примерах условия разрешимости ОКЗА удовлетворены за счет подбора параметров v_{*j} и $v_{\max j}$.

На рис. 6.3, б изображен несимметричный профиль, построенный для $\delta = 10^\circ$, $s_0/L = 0,486$ по распределениям (6.3.2) (сплошная линия 1 и штриховая линия 2 на рис. 6.3, а). Для удовлетворения условию совместимости начальных данных величина k не задавалась, а была найдена численно из уравнения (1.5.1) и получилась равной $k = 1,02$. Сплошной и штриховой линиями 3 и 4 изображены распределения скорости $v_j(s)$, восстановленные на участках $[0, s_0/L]$ и $[s_0/L, 1]$. Соответствующий профиль с относительной толщиной $t_{\max} = 16,0\%$ имеет $C_{y1} = 1,50$ и $C_{y2} = 0,28$ соответственно при $\alpha_1 = 6,7^\circ$ и $\alpha_2 = -3,3^\circ$ и безотрывен в рамках принятой модели.

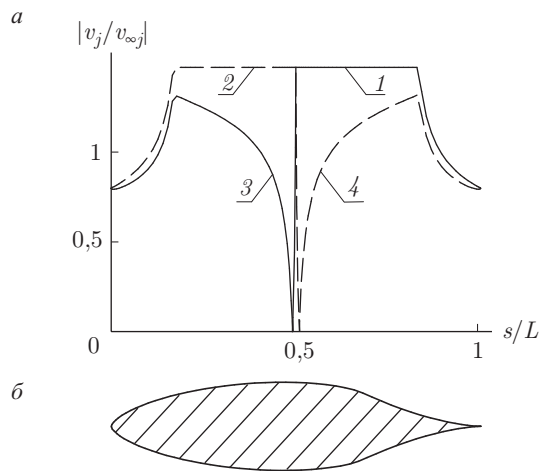


Рис. 6.2. Безотрывный оптимизированный симметричный профиль для диапазона $\delta = 10^\circ$: а — оптимизированное ГЦРС; б — форма оптимизированного профиля

Далее, для построения профилей, обтекаемых безотрывно в заданном диапазоне $\alpha \in [\alpha_2, \alpha_1]$ углов атаки и обладающих максимальной подъемной силой при $\alpha = \alpha_1$, выбор параметра $v_{\max 1}$ осуществим так, чтобы максимизировать величины $\Delta\varphi_1$ площади эюры $v_1(s)$ на интервале $[s_0, L]$. Действительно, на основании теоремы 6.2 при переменных значениях $v_{\max j}$ среди распределений (6.3.2) существует единственное, максимизирующее величину $\Delta\varphi_1$. Поэтому для максимизации $\Delta\varphi_1$ значение $v_{\max 1}$ нужно выбрать так, как указано в теореме 6.2 (см. таблицу) с заменой в уравнении (6.2.13) для нахождения Z_1 постоянных B и k на B_1 и k_1 из (6.3.3). Соответствующую этому распределению $v_1(s)$ функцию $v_2(s)$ нужно подобрать так, чтобы выполнялся критерий (6.2.1), а соответствующий контур L_z получался замкнутым.

На рис. 6.4, б изображен оптимизированный профиль, построенный описанным способом для $s_0/L = 0,47$, $k = 1$ и $\delta = 2^\circ$. Распределение $v_1(s)$ (сплошная линия 1) задано в виде (6.3.2), а подобранная для

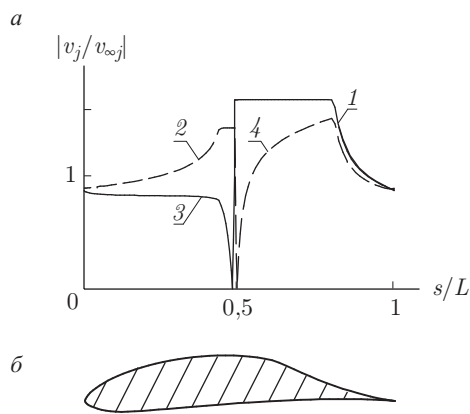


Рис. 6.3. Пример профиля, построенного по ГЦРС в диапазоне углов атаки:
 а — оптимизированное ГЦРС; б — форма оптимизированного профиля

него функция $v_2(s)$ изображена штриховой линией 2. Сплошной и штриховой линиями 3 и 4 изображены распределения скорости $v_j(s)$, восстановленные на участках $[0, s_0/L]$ и $[s_0/L, 1]$. Полученный профиль, характерный для дельтапланов, имеет коэффициент подъемной силы $C_{y1} = 3,07$ при угле атаки $\alpha_1 = 17,8^\circ$ и практически нулевой диапазон безотрывного обтекания. По форме он аналогичен профилю, построенному Либекком [116] с целью максимизации подъемной силы для фиксированного угла атаки и имеющему $C_y = 3,06$.

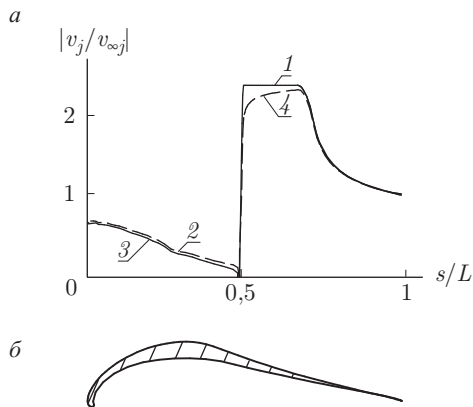


Рис. 6.4. Оптимизированный профиль с $C_y = 3,07$ для $\delta = 2^\circ$: а — оптимизированное ГЦРС; б — форма оптимизированного профиля

Профили на рис. 6.3 и рис. 6.4 представляют прежде всего теоретический интерес, так как являются оптимизированными в рамках описанной выше модели безотрывности. Расчет на них ПС по методу [110] с учетом начального ламинарного участка и его перехода в тур-

булентный показал наличие отрыва. При практическом проектировании профилей, обтекаемых безотрывно в заданном диапазоне изменения углов атаки, нужно в неравенствах (1.3.12) обязательно взять запас безотрывности. Один из таких примеров для $k = 1$, $\delta = 10^\circ$ приведен на рис. 6.5. В качестве исходных были использованы ГЦРС, построенные с учетом запаса безотрывности. Им соответствует разомкнутый контур. После применения метода квазиreshений для функционала J_0 получен профиль с замкнутым контуром (рис. 6.5, б) и $t_{\max} = 12\%$, распределения скоростей на котором при $\alpha_1 = 6^\circ$ и $\alpha_2 = -4^\circ$ представлены

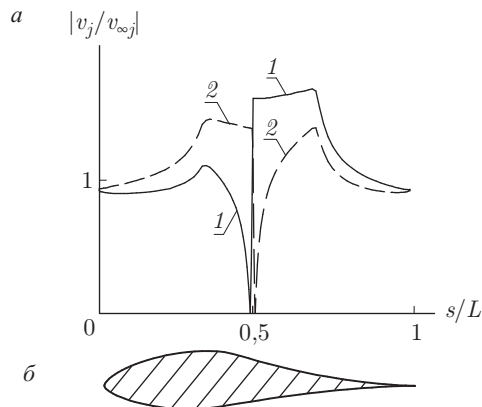


Рис. 6.5. Профиль, построенный по ГЦРС с учетом запаса безотрывности: а — оптимизированное ГЦРС; б — форма оптимизированного профиля

соответственно кривыми 1 и 2 на рис. 6.5, а. Расчет на этом профиле ПС слоя по методу [110] показал отсутствие отрыва во всем диапазоне изменения углов атаки и тем самым подтвердил практическую пригодность названного метода проектирования.

6.4. Исторические замечания и библиографические ссылки

6.4.1. Безотрывные распределения скорости. Вид аналогичный (6.1.5) имеют известные безотрывные распределение Вортмана [138, 139] и Стрэтфорда [132], эффективно использованные при практическом аэродинамическом проектировании крыловых профилей (например, [116–118, 128, 130, 131]).

6.4.2. Оптимизированные ГЦРС. Выше описаны простейшие вариационные задачи на классах ГЦРС. Более широкий спектр таких задач представлен в [35, 109].

Библиографический список

1. Абзалилов Д. Ф., Ильинский Н. Б. Об одной экстремальной задаче обтекания потоком идеальной несжимаемой жидкости гладкого контура со стоком // Докл. РАН. — 1997. — Т. 354. — № 1. — С. 43–46.
2. Абзалилов Д. Ф., Ильинский Н. Б., Марданов Р. Ф. Задача максимизации циркуляции скорости при обтекании гладкого контура с источниками и стоками // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. — 2000. — Т. 40. — № 1. — С. 82–98.
3. Авхадиев Ф. Г. Оценки в классе Зигмунда и их применение к краевым задачам // Докл. АН СССР. — 1989. — Т. 307. — № 6. — С. 1289–1292.
4. Авхадиев Ф. Г. Однолистные решения обратных краевых задач гидроаэромеханики // Труды семинара по краевым задачам. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. — Вып. 24. — С. 3–14.
5. Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А. Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций // Успехи мат. наук. — 1975. — Т. 30. — № 4. — С. 3–60.
6. Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А., Елизаров А. М. Достаточные условия конечнолистности аналитических функций и их приложения // Итоги науки и техники. Матем. анализ. — М.: ВИНТИ, 1987. — Т. 25. — С. 3–121.
7. Авхадиев Ф. Г., Елизаров А. М. Оценки критического числа Маха для некоторых классов несущих крыловых профилей // Моделирование в механике. — 1992. — Т. 6. — № 3. — С. 5–13.
8. Авхадиев Ф. Г., Елизаров А. М. Точные оценки решения одной вариационной обратной краевой задачи в счетносвязных областях // Изв. вузов. Матем. — 1996. — № 3. — С. 3–13.
9. Авхадиев Ф. Г., Елизаров А. М., Фокин Д. А. Максимизация критического числа Маха для несущих крыловых профилей // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. — 1992. — № 3. — С. 155–162.
10. Аксентьев Л. А. Об однолистной разрешимости обратных краевых задач // Труды семин. по краевым задачам. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1973. — Вып. 10. — С. 11–24; 1974. — Вып. 11. — С. 9–18.
11. Аксентьев Л. А., Журбенко Л. Н. Вопросы корректности в обратных краевых задачах // Труды семинара по краевым задачам. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1979. — Вып. 16. — С. 15–28.
12. Аксентьев Л. А., Ильинский Н. Б., Нужин М. Т., Салимов Р. Б., Тумашев Г. Г. Теория обратных краевых задач для аналитических функций и ее приложения // Итоги науки и техники. Матем. анализ. — М.: ВИНТИ, 1980. — Т. 18. — С. 67–124.
13. Аоки М. Введение в методы оптимизации. — М.: Наука, 1977. — 344 с.
14. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. — М.: Радио и связь, 1987. — 400 с.
15. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. — М.: ИИЛ, 1961. — 208 с.

16. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. — М.: Мир, 1964. — 466 с.
17. Габдулхаев Б.Г. Аппроксимация в H -пространствах и приложения // Докл. АН СССР. — 1975. — Т. 233. — № 6. — С. 1293–1296.
18. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. — 232 с.
19. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. — М.: Наука, 1977. — 640 с.
20. Гловинский Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. — М.: Мир, 1979. — 576 с.
21. Гогиш Л.В., Степанов Г.Ю. Турбулентные отрывные течения. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. — 368 с.
22. Гогиш Л.В., Степанов Г.Ю. Отрывные и кавитационные течения: основные свойства и расчетные модели. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 384 с.
23. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1965. — 628 с.
24. Гонор А.Л., Черный Г.Г. Поперечный контур тела минимального волнового сопротивления // В кн. Теория оптимальных аэродинамических форм / под ред. А. Миеле. — М.: Мир, 1969. — С. 292–305.
25. Гонор А.Л., Черный Г.Г. Форма нетонких тел минимального волнового сопротивления // В кн. Теория оптимальных аэродинамических форм / под ред. А. Миеле. — М.: Мир, 1969. — С. 379–395.
26. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. — М.: Наука, 1979. — 536 с.
27. Домбровский Г.А. Метод аппроксимации адиабаты в теории плоских течений газа. — М.: Наука, 1964. — 158 с.
28. Елизаров А.М. О квазирешениях внешней обратной краевой задачи // Изв. вузов. Матем. — 1984. — № 10. — С. 42–50.
29. Елизаров А.М. Некоторые экстремальные задачи теории крыла // Изв. вузов. Матем. — 1988. — № 10. — С. 71–74.
30. Елизаров А.М. Точные решения некоторых задач аэродинамической оптимизации // Модели механики сплошной среды. Обзорные доклады и лекции XVII сессии Международной школы по моделям механики сплошной среды (Казань, 4–10 июля 2004 года). Труды Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 22. — Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2004. — С. 13–54.
31. Елизаров А.М. Максимизация аэродинамического качества крыловых профилей с турбулентным пограничным слоем: точные решения и аппроксимация // Докл. РАН. — 2008. — Т. 419. — № 4. — С. 493–499.
32. Елизаров А.М., Ильинский Н.Б. Метод квазирешений в обратной краевой задаче гидроаэродинамики // Изв. вузов. Матем. — 1984. — № 10. — С. 50–59.
33. Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В. Квазирешения обратной краевой задачи гидроаэродинамики // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 284. — № 2. — С. 319–322.

34. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Обратные краевые задачи аэрогидродинамики // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. — М.: ВИНТИ, 1989. — Т. 23. — С. 3–115.
35. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Обратные краевые задачи аэрогидродинамики: теория и методы проектирования и оптимизации формы крыловых профилей. — М.: Физматлит, 1994. — 436 с.
36. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В., Степанов Г. Ю. Основные методы, результаты, приложения и нерешенные проблемы теории обратных краевых задач аэрогидродинамики // Труды Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. — Т. 10. — Казань: Изд-во «ДАС», 2001. — 225 с.
37. Елизаров А. М., Илюхин А. Э., Лапин А. В. Численное решение некоторых вариационных обратных краевых задач аэрогидродинамики // Труды Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 26. Численные методы решения задач математической физики. Материалы всерос. Молодежной научной школы-конф. с участием молодых ученых стран СНГ. Казань, 27 июня — 2 июля 2004. — Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2004. — С. 134–151.
38. Елизаров А. М., Илюхин А. Э., Лапин А. В. Численное решение некоторых вариационных обратных краевых задач аэрогидродинамики // Изв. вузов. Авиационная техника. — 2005. — № 1. — С. 28–33.
39. Елизаров А. М., Ихсанова А. Н., Фокин Д. А. Численная оптимизация формы крыла экраноплана методами теории вариационных обратных краевых задач // Обзорение прикладной и промышленной математики. — 2001. — Т. 8. — № 1. — С. 165–167.
40. Елизаров А. М., Ихсанова А. Н., Фокин Д. А. Оптимальное аэродинамическое проектирование крыловых профилей при ограничении на максимум скорости // Изв. вузов. Авиац. техника. — 2004. — № 3. — С. 32–36.
41. Елизаров А. М., Касимов А. Р. Методы комплексного анализа в задачах оптимизации формы. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, изд-во Казан. матем. об-ва, 2007. — 247 с.
42. Елизаров А. М., Касимов А. Р., Маклаков Д. В. Задачи оптимизации формы в аэрогидродинамике. — М.: Физматлит, 2008. — 480 с.
43. Елизаров А. М., Лапин А. В. Применение вариационных методов в обратных краевых задачах для аналитических функций // Изв. вузов. Математика. — 2004. — № 7. — С. 30–46.
44. Елизаров А. М., Федоров Е. В. Оптимизация аэродинамических форм методом обратных краевых задач // Прикл. мат. и мех. — 1990. — Т. 54. — № 4. — С. 571–580.
45. Елизаров А. М., Федоров Е. В. Решение вариационных обратных краевых задач аэрогидродинамики методами численной оптимизации // Журнал прикладной мех. и техн. физ. — 1993. — № 2. — С. 73–80.
46. Елизаров А. М., Федоров Е. В., Фокин Д. А. Вариационные обратные краевые задачи аэрогидродинамики для дозвукового течения газа // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. — 1993. — Т. 33. — № 6. — С. 958–968.
47. Елизаров А. М., Фокин Д. А. Оптимизация формы крыловых профилей, обтекаемых безотрывно в заданном диапазоне изменения угла атаки // Изв. вузов. Авиац. техника. — 1990. — № 2. — С. 45–48.

48. *Елизаров А. М., Фокин Д. А.* Построение крыловых профилей, обтекаемых безотрывно в заданном диапазоне изменения углов атаки // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1990. — № 3. — С. 157–164.
49. *Елизаров А. М., Фокин Д. А.* Вариационные обратные краевые задачи аэрогидродинамики // Докл. АН России. — 2001. — Т. 377. — № 6. — С. 758–763.
50. *Елизаров А. М., Фокин Д. А.* О точном решении задачи построения профиля максимальной подъемной силы при ограничении на максимум скорости на его контуре // На рубеже веков. НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева Казанского государственного университета. 1998 — 2002 гг. — Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2003. — С. 200–212.
51. *Елизаров А. М., Фокин Д. А.* Точные решения основной вариационной обратной краевой задачи аэрогидродинамики // Докл. РАН. — 2004. — Т. 399. — № 2. — С. 192–198.
52. *Елизаров А. М., Фокин Д. А.* Точные решения некоторых задач аэродинамической оптимизации // Прикл. мат. и мех. — 2005. — Т. 69. — Вып. 5. — С. 742–758.
53. *Зубов В. И.* К вопросу об оптимальном профиле крыла в потоке идеальной несжимаемой жидкости // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. — 1980. — Т. 20. — № 1. — С. 241–245.
54. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задачи и ее приложения. — М.: Наука, 1978. — 206 с.
55. *Ильинский А. Н., Ильинский Н. Б., Поляков Д. В., Поташев А. В., Степанов Г. Ю.* Уточнение критерия отрыва турбулентного пограничного слоя с использованием эмпирических данных // Препринт № 98-2. — Казань, 1998. — 62 с.
56. *Ильинский А. Н., Поташев А. В.* Решение обратной краевой задачи аэрогидродинамики с учетом пограничного слоя // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1989. — № 4. — С. 28–32.
57. *Ильинский Н. Б., Поташев А. В.* Краевые задачи теории взрыва. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. — 180 с.
58. *Иоффе Ф. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
59. *Каханер Д., Моулдер К., Нэш С.* Численные методы и математическое обеспечение. — М.: Мир, 1998. — 575 с.
60. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972. — 496 с.
61. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближений. — М.: Наука, 1976. — 320 с.
62. *Коппенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963. — 407 с.
63. *Крайко А. Н.* Вариационные задачи газовой динамики. — М.: Наука, 1979. — 447 с.
64. *Крайко А. Н.* Плоские и осесимметричные конфигурации, обтекаемые с максимальным критическим числом Маха // Прикл. матем. и мех. — 1987. — Т. 51. — № 6. — С. 941–950.
65. *Крайко А. Н., Пудовиков Д. Е., Якунина Г. Е.* Теория аэродинамических форм, близких к оптимальным. — М.: Янус-К, 2001. — 132 с.

66. *Лаврентьев М.А.* Об одной экстремальной задаче в теории крыла аэроплана // Труды ЦАГИ. — 1934. — Вып. 155. — 41 с.
67. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973. — 736 с.
68. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа, 6-е изд. — М.: Наука, 1987. — 840 с.
69. *Маклаков Д.В.* Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений со свободными границами. — М.: Янус-К, 1997. — 281 с.
70. *Милн-Томпсон Л.М.* Теоретическая гидродинамика. — М.: Мир, 1964. — 655 с.
71. *Монахов В.Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. — Новосибирск: Наука, 1977. — 421 с.
72. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968. — 511 с.
73. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977. — 455 с.
74. *Нужин М.Т., Ильинский Н.Б.* Методы построения подземного контура гидротехнических сооружений. Обратные краевые задачи теории фильтрации. — Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1963. — 139 с.
75. *Привалов И.И.* Граничные свойства аналитических функций. — М.: ГИТТЛ, 1950. — 336 с.
76. *Салимов Р.Б.* Некоторые основные задачи об изменении контуров теории аналитических функций и их приложения к механике жидкости. — Казань: Изд-во Казан. высш. командно-инж. училища, 1970. — 364 с.
77. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. — М.: Наука, 1966. — 448 с.
78. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. — М.: Наука, 1973. — 584 с.
79. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. — М.: Наука, 1980. — 448 с.
80. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1977. — 480 с.
81. *Степанов Г.Ю.* Гидродинамика решеток турбомашин. — М.: Физматгиз, 1962. — 512 с.
82. *Степанов Г.Ю.* Об основных модельных представлениях механики жидкости и газа в теории крыла // Некоторые вопросы механ. сплош. среды. — М.: Изд-во Московск. ун-та, 1978. — С. 5–28.
83. *Сунгурцев Ю.В.* Плоские струйные течения газа. — М.: Изд-во Московск. ун-та, 1989. — 256 с.
84. Теория оптимальных аэродинамических форм / под ред. *А. Миеле*. — М.: Мир, 1969. — 508 с.
85. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. 2-е изд. — М.: Наука, 1979. — 288 с.
86. *Тумашев Г.Г.* Построение профилей по заданному распределению скоростей // Уч. зап. Казан. ун-та. — 1949. — Т. 109. — № 1. — С. 73–87.
87. *Тумашев Г.Г.* Нахождение формы профиля по заданному распределению скорости с учетом сжимаемости жидкости // Изв. Казан. физ.-мат. об-ва. — 1945. — Т. 13. — Сер. 2. — С. 127–132.

88. *Тумашев Г. Г.* Определение формы границ потока жидкости по заданному распределению скорости или давления // Уч. зап. Казан. ун-та. — 1952. — Т. 112. — № 3. — С. 3–41.
89. *Тумашев Г. Г., Нужин М. Т.* Обратные краевые задачи и их приложения. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. — 333 с.
90. *Фокин Д. А.* Максимизация аэродинамического качества крыловых профилей с турбулентным пограничным слоем // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. — 1998. — № 3. — С. 177–184.
91. *Чаплыгин С. А.* О газовых струях // Полн. собр. соч. — Л.: АН СССР, 1933. — Т. 2. — С. 3–90.
92. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — 712 с.
93. *Шмыглевский Ю. Д.* Некоторые вариационные задачи газовой динамики. — М.: ВЦ АН СССР, 1963. — 142 с.
94. *Шмыглевский Ю. Д.* Аналитические исследования динамики газа и жидкости. — М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 232 с.
95. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. — М.: Мир, 1979. — 400 с.
96. *Avkhadiev F. G., Elizarov A. M.* Bilateral estimates of critical Mach number for some classes of carrying wing profiles // J. Australian Math. Soc. Ser. B. — 2001. — V. 42. — P. 494–503.
97. *Avkhadiev F. G., Elizarov A. M., Fokin D. A.* Estimates for critical Mach number under isoperimetric constraints // European J. Appl. Math. — 1995. — V. 6. — No 5. — P. 385–398.
98. *Arlinger B.* An exact method of two-dimentional airfoil design // Techn. Note SAAB, Linkjoping, Sweden, Oct. 1970. — TN-67. — 36 pp.
99. *Barbu V.* Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. — Stythoff & Noordhoff, 1976. — 352 pp.
100. *Betz A.* Anderung der Profilform zur Erzielung einer vorgegebenen Anderung der Druckverteilung // Z. Luftfahrtforschung. — 1934. — Bd. 11. — No 6. — S. 158–164.
101. *Betz A.* Applied airfoil theory // *Durand W. F.* (ed.) Aerodynamics. — Berlin: Springer, 1934. — V. 4.
102. *Elizarov A. M.* Optimal control of unknown boundary shape in inverse boundary-value problems // Revue Roumaine de Mathematiques Pures et Appliquees (Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics). — 1995. — V. 40. — No 2. — P. 157–168.
103. *Elizarov A. M., Fokin D. A.* Design and optimization of airfoils in non-stalling incompressible flow with a prescribed range of the angle of attack // Int. J. Numer. Methods in Eng. — 1992. — V. 35. — P. 121–132.
104. *Elizarov A. M., Fokin D. A.* Design and optimization of airfoils in non-stalling incompressible flow with a prescribed range of the angle of attack // Finite elements in fluids. New trends and applications, P. 1. *K. Morgan, E. Onate, J. Periaux, J. Peraire and O. C. Zienkiewicz* (Eds.), CIMNE: Pineridge Press, 1993. — P. 296–305.
105. *Elizarov A. M., Fokin D. A.* Upper estimates of airfoil aerodynamic characteristics for a viscous incompressible flow // Z. angew. Math. Mech. — 1999. — V. 79. — No 11. — P. 757–762.

106. *Elizarov A. M., Fokin D. A., Galyavieva M. S.* Problems of hydrofoil design for a given range of angles of attack // *Z. angew. Math. Mech.* — 1996. — V. 76. — No 6. — P. 337–340.
107. *Elizarov A. M., Fokin D. A., Ihsanova A. N.* Variational inverse boundary-value problems of aerodynamics for subsonic gas flow // *Computational Mechanics (Abstracts) WCCM VI in conjunction with APCOM'04*, Sept. 5–10, 2004, Beijing, China 2004. Tsinghua University Press and Springer-Verlag. — 6 pp.
108. *Elizarov A. M., Il'inskiy N. B., Potashev A. V.* Aerodynamic airfoils design by quasi-solutions method of inverse boundary-value problems // *Advances in Mechanics.* — 1991. — V. 14. — No 2. — P. 49–91.
109. *Elizarov A. M., Il'inskiy N. B., Potashev A. V.* Mathematical methods of airfoils design. Inverse boundary-value problems of aerohydrodynamics. — Berlin: Wiley-VCH, 1997. — 292 pp.
110. *Eppler R.* Airfoil design and data. — Berlin: Springer-Verlag, 1990. — 562 pp.
111. *Gabay D.* Application of the method of multipliers to variational inequalities // *Augmented Lagrangian Methods: Appl. Numer. Solution of Boundary-Value Problems.* — Amsterdam: North-Holland, 1983. — P. 299–331.
112. *Garabedian P. R., Korn D. G.* Numerical design of transonic airfoils // *Numerical Solution of Partial Differential Equations. II.* — New York: Acad. Press, 1971. — P. 253–271.
113. *Gilbarg D.* Jets and cavities // *Encyclopedia of physics.* — Berlin: Springer, 1960. — V. 9. — P. 311–445.
114. *Gilbarg D., Shiffman M.* On bodies achieving extreme values of the critical Mach number // *J. Ration. Mech. and Analysis.* — 1954. — V. 3. — No 2. — P. 209–230.
115. *Haslinger J., Neittaanmaki P.* Finite element approximation for optimal shape design: theory and application. — New York: John Wiley and sons Ltd., 1988. — 335 pp.
116. *Liebeck R. H.* A class of airfoils designed for high lift in incompressible flow // *AIAA Pap.* — 1973. — No 86. — 9 pp.; *J. Aircraft.* — 1973. — V. 10. — No 10. — P. 610–617.
117. *Liebeck R. H.* On the design of subsonic airfoils for high lift // *AIAA Pap.* — 1976. — No 76406. — 25 pp.
118. *Liebeck R. H.* Design of subsonic airfoil for high lift // *J. Aircraft.* — 1978. — V. 15. — No 9. — P. 547–561 (русский перевод: Ракетная техника и космонавтика. — 1978. — Т. 16. — № 12. — С. 122–143).
119. *Lighthill M. J.* A new method of two-dimensional aerodynamic design // *Aeronautical Res. Coun. Report and Mem.* — 1945. — V. 2112 — 3 pp.
120. *Lighthill M. J.* A mathematical method of cascade design // *Aeronaut. Res. Coun. Repts and Mem.* — 1945. — No 2104. — 18 pp.
121. *Lions P. L., Mercier B.* Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators // *SIAM J. Numer. Analys.* — 1979. — V. 16. — No 6. — P. 964–979.
122. *Loewner C.* Some bounds for the critical free stream Mach number of a compressible flow around an obstacle // *Studies in Math. and Mech.* presented to R. von Mises. — New York: Academic Press, 1954.

123. *Mangler W.* Die Berechnung eines Tragflügelprofiles mit vorgeschriebener Druckverteilung // Jahrb. Deutsch. Luftfahrtforschung. — 1938. — Bd. 1. — S. 46–53.
124. *Pironneau O.* Optimal shape design for elliptic systems. — New York: Springer, Springer Lecture Notes in Computational Physics, 1984. — 168 pp.
125. *Prandtl L.* Führer durch die Stromungslehre. — Göttingen, 1942.
126. *Riegels F. W.* Aerodynamische Profile. — München: R. Oldenburg, 1958. — 278 s.
127. *Schittkowski K.* NLQPL: A FORTRAN-subroutine solving constrained nonlinear programming problems // Annals of Operations Research. — 1985. — V. 5. — P. 485–500.
128. *Smith A. M. O.* High-lift aerodynamics // J. Aircraft. — 1975. — V. 12. — No 6. — P. 501–530.
129. *Sobieczky H.* Research on inverse design and optimization in Germany // 2nd Int. Conf. Inverse Des. Conc. and Optimiz. Eng. Sci.: ICIDES-II, Univ. Park, Pa, 1987. — Proc. Univ. Park. Pa. — 1987. — P. 75–102.
130. *Strand T.* Exact method of designing airfoil with given velocity distribution in incompressible flow // J. Aircraft. — 1973. — V. 10. — No 11. — P. 651–659.
131. *Strand T.* Design method for high lift airfoils with given velocity distribution in compressible subcritical inviscid flow // Kgl. Norske Vid. Selsk. Proc. Theodorsen Collog. — 1976. Trondheim e. a., s. a. — P. 114–133.
132. *Stratford B. S.* The prediction of separation of the turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. — 1954. — V. 5. — P. 1–35.
133. *Stratford B. S.* An experimental flow with zero skin friction throughout its region of pressure rise // J. Fluid Mech. — 1959. — V. 5. — P. 17–35.
134. *Weinig F.* Widerstands- und Tragflügelprofile mit vorgeschriebener Geschwindigkeitsverteilung an der Oberfläche // Z. angew. Math. und Mech. — 1929. — Bd. 9. — No 6. — S. 507–509.
135. *Weinig F.* Die Stromung un die Schaufeln von Turbomachinen. — Leipzig, 1935. — 141 s.
136. *Wolfram S.* Mathematica. A system for doing mathematics by computer. — Redwood City: Addison-Wesley, 1991. — 961 pp.
137. *Woods L. C.* The theory of subsonic plan flow. — Cambridge. Univ. Press, 1961. — 594 pp.
138. *Wortmann F. X.* Ein Beitrag zum Entwurf von Laminarprofilen für Segelflugzeuge und Hubschrauber // Z. Flugwiss. — 1955. — Bd. 3. — No 10. — S. 333–345.
139. *Wortmann F. X.* The quest for high lift // AIAA Pap. — 1974. — No 1018. — 5 pp.

Аббревиатуры, основные обозначения

ОКЗ	— обратные краевые задачи;
ОКЗА	— обратные краевые задачи аэрогидродинамики;
ПС	— пограничный слой;
ГЦР	— гидродинамически целесообразное распределение;
ГЦРС	— гидродинамически (или газодинамически) целесообразное распределение скорости;
ИНЖ	— идеальная несжимаемая жидкость;
$z = x + i y$	— комплексная координата точек физической плоскости (плоскости течения);
$\zeta = r e^{i \gamma}$	— комплексная переменная точек внешности единичного круга во вспомогательной плоскости;
$\zeta = \xi + i \eta$	— комплексная переменная точек вспомогательной полуплоскости;
L_z	— контур крылового профиля;
$B (z = 0)$	— задняя кромка крылового профиля;
$\varepsilon \pi$	— внутренний к области течения угол в точке B ;
(x_0, y_0)	— координаты точки контура профиля, наиболее удаленной от задней кромки;
s	— дуговая абсцисса контура профиля;
L	— периметр контура профиля;
$b = (x_0^2 + y_0^2)^{1/2}$	— хорда профиля;
$\alpha = -\operatorname{arctg}(y_0/x_0)$	— физический угол атаки;
β	— теоретический или аэродинамический угол атаки;
t_{\max}	— относительная максимальная толщина профиля;
$z' = x' + i y' = \frac{e^{i \alpha} z}{b} + 1$	— система координат, в которой ось абсцисс направлена вдоль хорды профиля;
E^-	— внешность единичного круга во вспомогательной плоскости ζ ;
φ	— потенциал скорости гидродинамического или фильтрационного течения;
ψ	— функция тока;
$w(z) = \varphi(x, y) + i \psi(x, y)$	— комплексный потенциал гидродинамического течения;

$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right),$	
$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$	— комплексные производные;
$\Delta \varphi = 4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}} = 0, \quad z \in G_z$	— уравнение Лапласа;
$\bar{v} = \partial w / \partial z = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y}$	— комплексно сопряженная скорость;
$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$	— условия Коши – Римана;
G_z	— область течения;
G_w, G_ζ	— образы области течения G_z в плоскостях w и ζ ;
L_w, L_ζ	— образы контура профиля L_z в плоскостях w и ζ ;
v и ϑ	— модуль и аргумент вектора скорости;
Γ	— циркуляция скорости по контуру профиля;
$\lambda = v / a_*$	— приведенная скорость газового потока;
$\lambda_\infty = v_\infty / a_*$	— приведенная скорость газового потока на бесконечности;
a_*	— критическая скорость звука;
$a_0 = (\kappa p_0 / \rho_0)^{1/2}$	— скорость звука в точке торможения газового потока;
$a_\infty = (\kappa p_\infty / \rho_\infty)^{1/2}$	— скорость звука адиабатического газового потока на бесконечности;
c^2	— параметр аппроксимации адиабатической зависимости;
$M = v / a$	— число Маха, a — местная скорость звука;
κ	— показатель адиабаты, $h^2 = (\kappa + 1) / (\kappa - 1)$;
$p_\infty, \rho_\infty, v_\infty$	— давление, плотность и скорость невозмущенного потока жидкости или газа;
p и ρ	— давление и плотность жидкости или газа;
p_0 и ρ_0	— давление и плотность газового потока в точке торможения;
λ_∞	— величина приведенной скорости невозмущенного потока;
M_∞	— число Маха невозмущенного потока;
M^*	— критическое число Маха;

$\text{Re}_\infty = v_\infty L / \nu$,	
$\text{Re}^{**} = v \delta^{**} / \nu$	— числа Рейнольдса;
ν	— кинематический коэффициент вязкости;
δ^*	— толщина вытеснения пограничного слоя;
δ^{**}	— толщина потери импульса ПС;
δ^{***}	— толщина потери энергии ПС;
$H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}; \quad H_{32} = \frac{\delta^{***}}{\delta^{**}}; \quad \text{Re}^{**} = \frac{v \delta^{**}}{\nu};$	
$f(s) =$	
$= \frac{av'(s)}{ v(s) ^b} \left \int_{s_*}^s v(\tau) ^{b-1} d\tau \right $	— формпараметр пограничного слоя;
$a = \frac{m+1}{m}, \quad b = 2 \frac{4m+1}{2m-1},$	
m	— эмпирическая постоянная, связанная с методом расчета ПС;
$C_p = 2(p - p_\infty) / (\rho_\infty v_\infty^2)$	— коэффициент давления;
$C_{p0} = \frac{2(p_0 - p_\infty)}{\rho_\infty v_\infty^2}$	— коэффициент давления в точке торможения потока;
Y	— подъемная сила;
X	— сила сопротивления;
$\tilde{C}_y = 2Y / (\rho_\infty v_\infty^2 b)$	— коэффициент подъемной силы;
$C_y = 2Y / (\rho_\infty v_\infty^2 L/2)$	— коэффициент подъемной силы, вычисленный по характерному линейному размеру $L/2$;
$\tilde{C}_x = 2X / (\rho_\infty v_\infty^2 b)$	— коэффициент силы сопротивления;
$C_x = 2X / (\rho_\infty v_\infty^2 L/2)$	— коэффициент силы сопротивления, вычисленный по характерному линейному размеру $L/2$;
M_z	— момент сил относительно передней кромки профиля;
$m_z = 2M_z / (\rho_\infty v_\infty^2 b^2)$	— коэффициент момента относительно передней кромки профиля;
$K = Y/X = C_y/C_x$	— аэродинамическое качество;
$\chi(\zeta) = \ln \left[v_\infty^{-1} \frac{dw}{dz}(\zeta) \right]$	— функция Мичела–Жуковского;
v_{\max}	— максимальное значение скорости потока на контуре профиля;
$L_2[0, 2\pi]$	— пространство функций, интегрируемых с квадратом на интервале $[0, 2\pi]$;
$\ f\ _{L_2} = \left[\int_0^{2\pi} f^2(\tau) d\tau \right]^{1/2}$	— норма в пространстве $L_2[0, 2\pi]$;
$C(M)$	— пространство непрерывных функций, заданных на множестве M ;

$\ f\ _C = \max_{\gamma \in M} f(\gamma) $	— норма в пространстве C ;
C_α	— пространство гёльдеровских функций, $\alpha \in (0, 1]$;
$H(A_0, \alpha)$	— подмножество функций из C_α , удовлетворяющих условию Гёльдера с фиксированными постоянными $A_0 \in (0, \infty)$ и $\alpha \in (0, 1]$;
$\ f\ _\alpha = \max_{\gamma \in [0, 2\pi]} f(\gamma) + \sup_{\gamma_1, \gamma_2 \in [0, 2\pi]} \frac{ f(\gamma_1) - f(\gamma_2) }{ \gamma_1 - \gamma_2 ^\alpha}$	— норма в пространстве C_α ;
$\ f\ _1 = \ f\ _\alpha$ при $\alpha = 1$;	
$(\mathbb{S}P)(\zeta) =$	
$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\tau) \frac{e^{i\tau} + \zeta}{e^{i\tau} - \zeta} d\tau$	— оператор Шварца;
$(\mathbb{T}P)(\gamma) =$	
$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\tau - \gamma}{2} d\tau$	— интеграл Гильберта;
\mathbb{R}	— множество вещественных чисел (числовая ось);
\mathbb{R}^N	— N -мерное евклидово пространство;
\mathbb{R}_+^N	— подпространство \mathbb{R}^N точек с неотрицательными координатами;
\mathbb{Z}	— множество целых чисел;
$\operatorname{int} M$	— внутренность множества M ;
$\operatorname{res}_{\zeta=a} f(\zeta)$	— вычет комплекснозначной функции $f(\zeta)$ в точке $\zeta = a$;
$G \approx 0,91 \dots$	— постоянная Каталана;
ζ	— дзета-функция Римана.

Список иллюстраций

1.1	К постановке краевых задач: a — крыловой профиль в физической плоскости; b — типичный вид распределения скорости $v(s)$	11
1.2	Аппроксимация адиабаты для $M_\infty = 0,8$, $\kappa = 7/5$	20
1.3	Точные (сплошные линии) и приближенные зависимости $C_p = C_p(\lambda)$: $1 - M_\infty = 0,5$; $2 - M_\infty = 0,7$; $3 - M_\infty = 1$ ($\kappa = 7/5$)	23
1.4	Поправочный множитель C_{p0}/C_{p0}^* как функция M_∞ для постоянной c^2 , выбранной по способу (1.2.25) (1), и для $c^2 = 0,296$ (2)	24
1.5	К построению интегрального представления решения основной ОКЗА: a — область значений комплексного потенциала; b — каноническая область во вспомогательной плоскости	33
1.6	К постановке ОКЗА для диапазона углов атаки: a — физическая плоскость; b — распределения скорости $v_j(s)$, $j = 1, 2$, для крайних значений угла атаки из заданного диапазона (случай $\varepsilon = 2$)	44
1.7	Схемы задания исходных данных при $\varepsilon = 2$: $a - n_1 = 0, n_2 = 1, s_{*2} \leq s_0 < L$; $b - n_1 = 1, n_2 = 0, 0 < s_0 < s_{*1}$; $c - n_1 = n_2 = 0, s_{*1} \leq s_0 \leq s_{*2}$	45
2.1	К определению квазирешения	60
3.1	Зависимость v^* от параметра β при $\varepsilon = 2$	81
3.2	Пример построения квазирешения с учетом ограничения на максимум скорости: a — исходное распределение скорости (1) и квазирешение (2) для $\varepsilon = 2$, $\beta = 0,1$ и $v_{\max} = 1,4$; b — исходный замкнутый контур (1) и контур, соответствующий квазирешению (2)	82
3.3	Пример построения квазирешения с учетом ограничения на максимум скорости: a — исходное распределение скорости (1) и квазирешение (2) для $\varepsilon = 2$, $\beta = 0,1$ и $v_{\max} = 1,6$; b — исходный разомкнутый контур (1) и контур, соответствующий квазирешению (2)	83
3.4	Пример построения квазирешения с учетом ограничения на максимум скорости: a — исходное распределение скорости (1) и квазирешение (2) для $\varepsilon = 2$, $\beta = 0,1$ и $v_{\max} = 2$; b — исходный контур (1) и контур, соответствующий квазирешению (2)	83
3.5	Пример построения квазирешения без учета ограничения на максимум скорости: a — исходное распределение скорости (1) и квазирешение (2) для $\varepsilon = 2$ и $\beta = 0,1$; b — исходный контур (1) и контур, соответствующий квазирешению (2)	84

3.6	Пример построения квазирешения с учетом ограничения на максимум скорости: a — исходное распределение скорости (1) и квазирешение (2) для $\epsilon = 2$, $\beta = 0,3$ и $v_{\max} = 1,25$; b — исходный разомкнутый контур (1) и контур, соответствующий квазирешению (2)	85
3.7	Пример построения квазирешения с учетом ограничения на максимум скорости: a — исходное распределение скорости (1) и квазирешение (2) для $\epsilon = 2$, $\beta = 0,3$ и $v_{\max} = 1,4$; b — исходный разомкнутый контур (1) и контур, соответствующий квазирешению (2)	85
3.8	Пример построения квазирешения с учетом ограничения на максимум скорости: a — исходное распределение скорости (1) и квазирешение (2) для $\epsilon = 2$, $\beta = 0,3$ и $v_{\max} = 1,6$; b — исходный разомкнутый контур (1) и контур, соответствующий квазирешению (2)	86
3.9	Квазирешения, построенные для одного и того же исходного распределения скорости при $\epsilon = 2$, $\beta = 0,15$ и значениях $v_{\max} = 2$; 1,5; 1,2: переход от замкнутого самонепересекающегося контура к неоднолистному течению	87
3.10	Квазирешения, построенные для одного и того же исходного распределения скорости при $\epsilon = 2$, $\beta = 0,15$ и разных значениях $v_{\max} = 1,8$; 1,4; 1,2: переход от разомкнутого самопересекающегося контура к неоднолистному течению	88
3.11	Квазирешения, построенные для одного и того же исходного распределения скорости при $\epsilon = 2$, $\beta = 0,15$ и разных значениях $v_{\max} = 1,8$; 1,4; 1,2: переход от разомкнутого самонепересекающегося контура к неоднолистному течению	89
3.12	Исходное гидродинамически целесообразное распределение скорости (a) и соответствующий ему замкнутый контур (b)	89
3.13	Шкалы квазирешений с ограничением на максимум скорости в диапазоне параметров $\beta \in [0,1; 0,5]$, $v_{\max} \in [1,2; 3]$	90
3.14	Пример построения симметричного профиля для $\delta = 8^\circ$: a — исходные (1 и 2) и модифицированные (3 и 4) распределения скорости; b — замкнутый контур	91
3.15	Точное решение ОКЗА для диапазона углов атаки по хордовой диаграмме скорости	92
3.16	Профиль, построенный по хордовым диаграммам скорости	93
4.1	К постановке задачи A	95
4.2	Допустимая и недопустимая области изменения параметров β и v_{\max}	105
4.3	Численная оптимизация профиля с острой задней кромкой, $\epsilon = 2$, $\beta = 0,2$, $v_{\max} = 1,4$; 1,5	114
4.4	Зависимости $C_{y \max}$ от v_{\max} для разных β и сравнение с характеристиками профиля Е-61	116
4.5	Численная оптимизация профиля с заостренной задней кромкой, $\epsilon = 2$, $N = 9$, $v_{\max} = 1,8$, $\beta = 8^\circ$; 10° ; 15° ; 20°	117

4.6	Численная оптимизация профиля с заостренной задней кромкой, $\varepsilon = 2$, $N = 18$, $v_{\max} = 1,4$, $\beta = 8^\circ$; 10° ; 14°	118
4.7	Безотрывные оптимальные профили для $v_{\max} = 1,8$ при $\beta = 8^\circ$; 10° ; 15° ; 20°	119
4.8	Сравнение оптимального профиля, полученного численным методом, с профилем NASA-4406 при $\beta = 8^\circ$ и $v_{\max} = 1,76$	120
4.9	Точные решения задачи A' для $\varepsilon = 1$ при $\beta = 90^\circ$ и $v_{\max} = 4$; $3,8$; $3,6$; $3,4$	123
4.10	Точные решения задачи A' для $\varepsilon = 1$ при $\beta = 90^\circ$ и $v_{\max} = 3,2$; $3,1$; $3,0$; $2,9$	123
4.11	Точные решения задачи A' для $\varepsilon = 1$ при $v_{\max} = 1,8$ и $\beta = 8^\circ$; 10° ; 15° ; 20°	124
4.12	Точные решения задачи A' для $\varepsilon = 1$ при $v_{\max} = 1,4$ и $\beta = 8^\circ$; 10° ; 14° ;	125
4.13	Оптимальные контуры, соответствующие точному решению, при $\varepsilon = 1$, $\beta^* = 8^\circ$ и $v_{\max} = 1,3$; $1,5$; $1,8$; $2,28$	126
4.14	Оптимальные контуры, соответствующие точному решению, при $\varepsilon = 1$, $\beta^* = 15^\circ$ и $v_{\max} = 1,5$; $1,7$; $2,0$; $2,5176$	126
4.15	Оптимальные контуры, соответствующие точному решению, при $\varepsilon = 1$, $v_{\max} = 1,4$ и $\beta = 5^\circ$; 10° ; 12° ; 13°	127
4.16	Оптимальные контуры, соответствующие точному решению, при $\varepsilon = 1$, $v_{\max} = 1,8$ и $\beta = 10^\circ$; 12° ; 20° ; 27°	128
4.17	Оптимальные контуры, соответствующие точному неоднолистному решению, при $v_{\max} = 1,8$ и $\beta = 28^\circ$ и строение контура в окрестности задней кромки	128
4.18	Оптимальные контуры, соответствующие точному неоднолистному решению, при $v_{\max} = 1,4$ и $\beta = 14^\circ$ и строение контура в окрестности задней кромки	128
4.19	К постановке задачи B	129
4.20	Оптимальные контуры (2), построенные численно для $\varepsilon = 1$, $v_{\max} = 2$ при $\beta = 10^\circ$ и $h = 0,1$; $0,5$; $1,0$; l — хордовые диаграммы скорости	133
4.21	Оптимальный контур, построенный численно для $\varepsilon = 1$, $v_{\max} = 1,84$ при $\beta = 10^\circ$ и $h = 0,1$	133
4.22	Оптимальные контуры (2), построенные численно для $\varepsilon = 2$, $v_{\max} = 1,84$ и $v_{\max} = 2$ соответственно при $\beta = 10^\circ$ и $h = 0,1$; $0,5$; $1,0$ и хордовые диаграммы скорости (1)	134
4.23	Оптимальный безотрывный крыловой профиль и соответствующее распределение скорости при $\beta = 10^\circ$ и $h = 0,1$ для $v_{\max} = 1,84$	134
5.1	График мажоранты $\lambda_\infty^* = \lambda_\infty^*(\beta)$ при $\varkappa = 7/5$	144
5.2	Сравнение расчетных формул (5.1.25) и (5.1.26) с данными расчета ПС для профиля NASA 23015	147
5.3	Экстремальные зависимости $K^*(\beta)$ для чисел Рейнольдса $Re_\infty = 10^7$; $5 \cdot 10^6$; 10^6 (линии 1–3)	152
5.4	Профиль с повышенным аэродинамическим качеством, построенный при $r_1 = 0,5$, $r_2 = 0,65$, $\beta = 0,087$ и $b = 4,5$	153

5.5	Шкалы крыловых профилей с повышенным аэродинамическим качеством, построенных при $\beta = 0,087$, $b = 4,5$ и разных r_1 и r_2	155
5.6	Шкалы крыловых профилей с повышенным аэродинамическим качеством, построенных при $\beta = 0,087$, $b = 5$ и разных r_1 и r_2	156
5.7	Оптимальные контуры, полученные при $\beta = 0,1$ для разных значений M_∞ (a) и соответствующие распределения приведенной скорости (b)	165
5.8	Оптимальные контуры, полученные при $\beta = 0,1$ для разных значений M_∞ (a) и соответствующие распределения скорости (b)	166
5.9	Оптимальный профиль (2) и хордовая диаграмма скорости (1) при $\beta = 0,1$ и $M_\infty = 0,328$	167
5.10	Зависимости $C_{y \max} = C_{y \max}(M_\infty)$ для разных $\beta \in [0, 90^\circ]$ с шагом 10°	167
5.11	Зависимость $C_{y \max} = C_{y \max}(M_\infty)$ для разных $\beta \in [0, 20^\circ]$ с шагом 1°	168
5.12	Оптимальные контуры, соответствующие точному решению, при $\varepsilon = 1$, $\beta = 5^\circ$ и $M_\infty = 0,0001; 0,4; 0,6; 0,721$	168
5.13	Оптимальные контуры, соответствующие точному решению, при $\varepsilon = 1$, $\beta = 10^\circ$ и $M_\infty = 0,0001; 0,3; 0,4; 0,5761$	169
5.14	Оптимальные контуры, соответствующие точному решению, при $\varepsilon = 1$, $\beta = 20^\circ$ и $M_\infty = 0,0001; 0,36; 0,4; 0,495$	169
5.15	Оптимальные контуры, соответствующие точному решению, при $\varepsilon = 1$, $\beta = 30^\circ$ и $M_\infty = 0,0001; 0,32; 0,46; 0,47$	170
5.16	Оптимальный самопересекающийся контур, соответствующий точному решению, при $\varepsilon = 1$, $\beta = 30^\circ$ и $M_\infty = 0,47$	170
5.17	Оптимальные профили (2) и хордовые диаграммы скорости (1) для $\varepsilon = 1$, $\beta = 10^\circ$ и $\lambda_\infty = 0,3; 0,4; 0,5; 0,6$	172
5.18	Оптимальные профили (контур 2) и хордовые диаграммы скорости (линии 1) для $\varepsilon = 2$, $\beta = 10^\circ$ и $\lambda_\infty = 0,3; 0,4; 0,5; 0,6$	173
5.19	Оптимальные безотрывные крыловые профили (a) и распределения скорости (b) при $\beta = 10^\circ$ и разных числах M_∞	173
5.20	Профили максимальной подъемной силы, безотрывные по Лойцянского при фиксированном β : a — оптимизированные распределения скорости; b — формы оптимизированных профилей	175
5.21	Профили максимальной подъемной силы, безотрывные по Прандтлю–Бури при фиксированном β : a — оптимизированные распределения скорости; b — формы оптимизированных профилей	175
5.22	Профили максимальной подъемной силы, безотрывные по Кочину–Лойцянского при фиксированном β : a — оптимизированные распределения скорости; b — формы оптимизированных профилей	175
5.23	Профили максимальной подъемной силы, когда β — параметр оптимизации: a — оптимизированные распределения скорости; b — безотрывные оптимизированные профили	177

5.24	Профили максимальной подъемной силы в газе Чаплыгина: a — оптимизированные распределения скорости; b — формы оптимизированных профилей	178
5.25	Оптимизированные профили, безотрывные по Лойцянскому и построенные при дополнительных ограничениях на аэродинамические коэффициенты: a — оптимизированные распределения скорости; b — формы оптимизированных профилей	180
5.26	Пример оптимизации формы профиля для диапазона углов атаки при фиксированных границах этого диапазона: a — оптимизированные распределения скорости; b — профили максимальной подъемной силы, безотрывные по Кочину–Лойцянскому; v — полярная диаграмма $C_y = C_y(C_x)$	180
5.27	К постановке задачи	182
5.28	Область допустимых значений параметров оптимизации	183
5.29	Профили, максимизирующие критическое число Маха при разных значениях β : a — распределения $M = M(x)$ чисел Маха по хорде профилей при $\beta = 10^\circ, 20^\circ$ и 30° (1–3); b — соответствующие формы контуров	185
5.30	Переход от однолистного течения к неоднolistному: a — однолистное течение при $\beta = 50^\circ$; b — предельный случай однолистного течения при $\beta = 68,25^\circ$; v — неоднolistное течение при $\beta = 72^\circ$	185
5.31	Зависимости $M^* = M^*(\beta)$ при разных ϑ_* и ϑ^* : $\vartheta_* = \vartheta^* = \infty$ (1); $\vartheta_* = \vartheta^* = 60^\circ$ (2); $\vartheta_* = \vartheta^* = 40^\circ$ (3); $\vartheta_* = 80^\circ, \vartheta^* = \infty$ (4); $\vartheta_* = 40^\circ, \vartheta^* = \infty$ (5)	187
5.32	Неоднolistное течение для оптимизированного решения из параметрического класса	189
5.33	Однолистное течение для оптимизированного решения из параметрического класса: a — оптимизированное распределение скорости (1) и распределение скорости, полученное из решения прямой задачи (2); b — оптимизированный профиль	190
5.34	Диаграммы зависимости M_∞ от C_y для различных значений t_{\max}	190
6.1	Схемы задания исходных данных для максимизации подъемной силы	203
6.2	Безотрывный оптимизированный симметричный профиль для диапазона $\delta = 10^\circ$: a — оптимизированное ГЦРС; b — форма оптимизированного профиля	205
6.3	Пример профиля, построенного по ГЦРС в диапазоне углов атаки: a — оптимизированное ГЦРС; b — форма оптимизированного профиля	206
6.4	Оптимизированный профиль с $C_y = 3,07$ для $\delta = 2^\circ$: a — оптимизированное ГЦРС; b — форма оптимизированного профиля	206
6.5	Профиль, построенный по ГЦРС с учетом запаса безотрывности: a — оптимизированное ГЦРС; b — форма оптимизированного профиля	207

Список таблиц

	Эмпирические постоянные в критериях безотрывности	28
4.1	Характеристики численных оптимальных решений для $\varepsilon = 2$ при $v_{\max} = 1,8; 1,4$ и разных β	118
4.2	Характеристики оптимальных безотрывных профилей, построенных численно при $v_{\max} = 1,8$ и разных β	119
4.3	Характеристики точных оптимальных решений для $\varepsilon = 1$ при $\beta = \pi/2$ и разных v_{\max}	124
4.4	Характеристики точных оптимальных решений для $\varepsilon = 1$ при $v_{\max} = 1,8, v_{\max} = 1,4$ и разных β	125
4.5	Характеристики точных оптимальных решений для $\varepsilon = 1$ при $\beta = 8^\circ, \beta = 15^\circ$ и разных v_{\max}	127
4.6	Характеристики численных решений при $v_{\max} = 2,0$ и $\beta = 10^\circ$ для $h = 0,1; 0,5; 1,0; \infty$ в сравнении с точным решением при $h = \infty$	133
4.7	Характеристики численных решений при $\beta = 10^\circ$ для разных h	134
5.1	Рассчитанные значения (в радианах) угла атаки оптимизированных профилей в зависимости от параметров r_1 и r_2 при $Re_\infty = 10^6, A = 0,037, m = 4, \beta = 0,087$ и $b = 4,5$	157
5.2	Рассчитанные значения аэродинамического качества оптимизированных профилей в зависимости от параметров r_1 и r_2 при $Re_\infty = 10^6, A = 0,037, m = 4, \beta = 0,087$ и $b = 4,5$	157
5.3	Рассчитанные значения аэродинамического качества оптимизированных профилей в зависимости от параметров r_1 и r_2 при $Re_\infty = 10^7, A = 0,0153, m = 6, \beta = 0,087, b = 5$	158
5.4	Характеристики точных оптимальных решений для $\varepsilon = 1$ при $\beta = 0,1$ и разных M_∞	166
5.5	Характеристики точных оптимальных решений для $\varepsilon = 1$ при разных β и M_∞	171
5.6	Характеристики численных решений при $\beta = 10^\circ$ и разных λ_∞	172
5.7	Характеристики оптимальных безотрывных профилей, построенных численно, при $\beta = 0,1$ и разных числах M_∞	173
5.8	Характеристики оптимизированных профилей	176
5.9	Характеристики профилей максимальной подъемной силы, когда β — параметр оптимизации	177
	Параметры полочных распределений	196